Fundamentals of Rotor Dynamics

Grundlagen der Rotordynamik

Textbook

Vorlesungsskript

Joachim Venghaus

Newcastle upon Tyne / Stralsund 2007

v2.1

Preface

The contents of this paper is based on a lecture held by my venerated teacher Prof. Dr. Dietrich Behr at Clausthal Technical University between 1985 and 1989 and then continued by me on his behalf until 1991.

This paper with its bilingual structure is predominantly addressed to students whose mother tongue is German. While acquiring the theoretical background of rotor dynamics they can get used to the English terminology whenever they want. Further studies using English literature can then be done much more easily

The substantial part of this paper was written in the year 2007 while I was staying at the University of Newcastle upon Tyne. Dr Brian Agnew arranged for me to work as a Visiting Scholar at the School of Mechanical und Systems Engineering. For this and for his great support during my stay I would like to thank Brian very much.

For the help I received and the patience I could experience during my stay I would like to thank the staff at Newcastle University

Vorwort

Der Inhalt dieser Schrift basiert auf der Vorlesungsreihe Rotordynamik, die mein verehrter Lehrer, Prof. Dr. Dietrich Behr, in den Jahren 1985 bis 1989 an der Technischen Universität Clausthal gehalten hat und die anschließend bis zum Jahr 1991 von mir in seinem Auftrage weitergeführt wurde.

Diese Schrift mit seinem zweisprachigen Aufbau richtet sich in erster Linie an Studierende, deren Muttersprache Deutsch ist. Bei der Erarbeitung des theoretischen Hintergrundes der Rotordynamik ist jederzeit ein Blick in die englische Terminologie möglich, wodurch weiterführende Studien mit Hilfe von englischsprachiger Literatur wesentlich leichter vonstatten gehen sollten.

Der wesentliche Teil dieser Schrift entstand im Jahr 2007 während eines Forschungsaufenthaltes an der University of Newcastle upon Tyne. Durch die Vermittlung von Dr Brian Agnew erhielt ich eine Einladung als Visiting Scholar an der School for Mechanical und Systems Engineering zu arbeiten. Hierfür und für seine große Hilfe während meines Aufenthaltes möchte ich Brian sehr herzlich danken.

Auch den Kollegen an der Universität Newcastle möchte ich an dieser Stelle für ihre Hilfe und ihre Geduld danken.

Inhaltsverzeichnis

1 Fundamentals

Grundlagen

The dynamics of rotors as considered here is characterised by one or more rigid bodies, which are often axially symmetric. They rotate around at least one axis but they can perform further movements along or around other axes. These systems are often mounted more or less stiffly against the surrounding

Die Rotordynamik, wie sie hier betrachtet wird ist gekennzeichnet durch einen oder mehrere, häufig rotationssymmetrische Körper, die um mindestens eine Achse rotieren sowie weitere Bewegungen ausführen können. Häufig sind solche Systeme dabei mehr oder weniger steif gegen eine feste Ungebung abgestützt bzw. gelagert.

1.1 Coordinate Systems

Koordinatensysteme

Some quantities that describe the rotor system can be given very easily in an absolute frame of reference, which will be called absolute coordinate system. An example is the position of possible rolling contact bearings. Other quantities, for example the position of an unbalance on a revolving rotor, are less easy to describe in the absolute coordinate system. A second coordinate system that rotates with the rotor and is fixed to this rigid body is much more amendable to describe the position of the unbalance of a rotor, because the unbalance does not usually move relatively to the rotor. By means of constant coordinates the unbalance can be described in the so-called relative coordinate system.

Einige, das Rotorsystem beschreibende Größen können recht einfach in der festen Umgebung, dem sog. Inertialsystem angegeben werden. Hierzu gehören beispielsweise die Positionen etwaiger Wälzlager. Andere Größen lassen sich hier nur recht schwierig angeben. Die Lage einer Unwuchtmasse auf dem umlaufenden Rotor im Inertialsystem anzugeben, dürfte vergleichsweise schwierig sein. Ein zweites Koordinatensystem, welches mit dem Rotor umläuft, also körperfest ist und sich relativ zum Inertialsystem bewegt, ist für die Bestimmung der Lage einer Unwuchtmasse sehr viel praktikabler, da sich die Unwuchtmasse üblicherweise auf dem Rotor nicht selbst bewegt. Somit kann die Lage mittels konstanter Koordinaten in dem körperfesten Relativsystem angegeben werden.

The transfer of information that is obtained in one coordinate system to the other must be possible. Let the position vector that describes the position of the unbalance be this information to be transformed into the other coordinate system.

Die Übergabe von Information, die in einem Koordinatensystem gewonnen werden, in ein Anderes muss allerding möglich sein. In diesem Beispiel besteht die Information aus einem Ortsvektor eines Koordinatensystems der dann in ein anderes Koordinatensystem transformiert werden muss.

1.1.1 Absolute Coordinate System $\mathcal{K}_O$

Inertialsystem $\mathcal{K}_O$

Let the absolute coordinate system , which is fixed to the surrounding $\mathcal{K}_O$ have the origin O. It is furthermore characterized by

Das raumfeste Inertialsystem $\mathcal{K}_O$ hat den Ursprung O, es ist weiter gekennzeichnet durch

- the unit vectors $\vec{e}_1$; $\vec{e}_2$; $\vec{e}_3$,
- and the coordinates x_1; x_2; x_3. We will use x; y; z as well.

A certain point P will be given in the absolute coordinate system as

- die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$; $\vec{e}_2$; $\vec{e}_3$,
- und die Koordinaten x_1; x_2; x_3. Häufig wird auch verwendet x; y; z.

Ein Punkt P wird im Inertialsystem dargestellt

$$\vec{r}_{OP} = \vec{e}_1\ x_{P1} + \vec{e}_2\ x_{P2} + \vec{e}_3\ x_{P3} = \begin{pmatrix} x_{P1} \\ x_{P2} \\ x_{P3} \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Relative Coordinate System $\mathcal{K}_R^*$

Relativsystem $\mathcal{K}_R^*$

The rotor fixed relative coordinate system has the origin R, it is furthermore characterized by

- the unit vectors $\vec{e}_1^*$; $\vec{e}_2^*$; $\vec{e}_3^*$,
- and the coordinates x_1^*; x_2^*; x_3^*. We will use x^*; y^*; z^* as well.

A certain point P will be given in the relative coordinate system as

Das körperfeste Relativsystem $\mathcal{K}_R^*$ hat den Ursprung R, es ist weiter gekennzeichnet durch

- die Einheitsvektoren $\vec{e}_1^*$; $\vec{e}_2^*$; $\vec{e}_3^*$,
- die Koordinaten x_1^*; x_2^*; x_3^*. Häufig wird auch verwendet x^*; y^*; z^*.

Ein Punkt P wird im Relativsystem dargestellt:

$$\vec{r}_{RP}^* = \vec{e}_1^*\ x_{P1}^* + \vec{e}_2^*\ x_{P2}^* + \vec{e}_3^*\ x_{P3}^* = \begin{pmatrix} x_{P1}^* \\ x_{P2}^* \\ x_{P3}^* \end{pmatrix}.$$

1.2 Transformations

Transformationen

If we need to transform the representation of a certain point in one of the coordinate systems into the representation in the other one we have to define the so-called cardanic angles [1] α; β; γ.

Um die Darstellung eines Punktes in dem einen System in die Darstellung des anderen Systems überführen zu können, müssen die Kardanischen Winkel [1] α; β; γ eingeführt werden.

[1] Gerolamo Cardano (* 24 September 1501 in Pavia; † 21 September 1576 in Rome); Italian physician und mathematician. Cardano seems to be the first who calculated with complex numbers when he tried to solve cubic equations. In 1545 he published his book *Ars magna de Regulis Algebraicis*, in which he showed his solutions for equations of third and fourth order. Cardano described first the gimbal, which was invented earlier. In German a gimbal is called a "Cardanic suspension". Later the universal joint was called cardan joint because its construction is similar to a gimbal. (Source: www.de.wikipedia.org, 2007).

Gerolamo Cardano (* 24. September 1501 in Pavia; † 21. September 1576 in Rom); Italienischer Arzt und Mathematiker. Cardano hat wohl als erster Berechnungen mit komplexen Zahlen durchgeführt. Er stieß auf komplexe Zahlen beim Versuch kubische Gleichungen zu lösen. 1545 erschien sein Buch *Ars magna de Regulis Algebraicis*, in dem er Methoden zur expliziten Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades angab. Cardano beschrieb als erster die schon vor ihm erfundene Kardanische Aufhängung. Später bürgerten sich auch für das ähnlich aussehende Kreuzgelenk und die damit versehenen Gelenkwellen der Begriff Kardangelenk bzw. Kardanwelle ein (Quelle: www.de.wikipedia.org, 2007).

These angles turn $\mathcal{K}_R^*$ against $\mathcal{K}_O$. Let

- α turn $\mathcal{K}_R^*$ against $\mathcal{K}_O$ around the axis $\vec{e}_1$,
- β turn $\mathcal{K}_R^*$ against $\mathcal{K}_O$ around the axis $\vec{e}_2$,
- γ turn $\mathcal{K}_R^*$ against $\mathcal{K}_O$ around the axis $\vec{e}_3$.

Diese Winkel verdrehen $\mathcal{K}_R^*$ gegen $\mathcal{K}_O$. Dabei gilt:

- α verdreht $\mathcal{K}_R^*$ gegen $\mathcal{K}_O$ um die Achse $\vec{e}_1$,
- β verdreht $\mathcal{K}_R^*$ gegen $\mathcal{K}_O$ um die Achse $\vec{e}_2$,
- γ verdreht $\mathcal{K}_R^*$ gegen $\mathcal{K}_O$ um die Achse $\vec{e}_3$.

Consider: There is another group of three angles that could be used, the so called EULER angles ψ, ϑ, ϕ. The first EULER angle ψ turns around $\vec{e}_3$, the second angle ϑ turns around $\vec{e}_2$, the third angle ϕ turns around $\vec{e}_3$ again, however, this unit vector points into another direction meanwhile. But in cases of $\vartheta = 0$ the unique definition gets lost. For technical appliences, the cardanic angles should be preferred.

Hinweis: Es gibt ein weiteres Tripel von Winkeln, die sog. EULERschen Winkel ψ, ϑ, ϕ. Der erste EULERsche Winkel ψ dreht um $\vec{e}_3$, der zweite, ϑ, dreht um $\vec{e}_2$ und der dritte Winkel ϕ dreht erneut um $\vec{e}_3$ dieser Einheitvektor zeigt mittlerweile aber in eine andere Richtung. Allerdings wird in den Fällen in denen $\vartheta = 0$ wird die eindeutige Zuordnung verloren gehen, daher ist für technische Anwendung die Wahl von kardanischen Winkeln zu bevorzugen.

Each component of a vector can be transformed from one coordinate system into the other.

Bei der Überführung von dem einen ins andere System können die Komponenten von vektoriellen Größen transformiert werden.

$$x_{Pi}^* = \sum_j q_{ij}\, x_{Pj} \qquad \text{where /mit } (i, j = 1, 2, 3).$$

We can transform into the opposite direction as well.

In Gegenrichtung ist eine Transformation ebenso möglich.

$$x_{P\ell} = \sum_k q_{\ell k}^*\, x_{Pk}^* \qquad \text{where /mit } (\ell, k = 1, 2, 3).$$

Let the transformation elements q_{ij} respectively $q_{\ell k}^*$ be:

Es gilt für die Transformationselemente q_{ij} bzw $q_{\ell k}$:

$$q_{ij} = \cos(\vec{e}_i^{\,*};\ \vec{e}_j), \qquad q_{\ell k}^* = \cos(\vec{e}_\ell;\ \vec{e}_k^{\,*})$$

The sums shown can be subsumed in matrix notation. To be calculated may be an arbitrary position vector $\vec{r}_{RP}^{\,*}$, described by: "Position vector of point P with respect to origin R, noted in the relative coordinate system $\mathcal{K}_R^*$". We can calculate it from a vector noted in the absolute coordinate system as:

Die dargestellten Summen können in Matrizenschreibweise zusammengefasst werden. Gesucht sei ein beliebiger Ortsvektor $\vec{r}_{RP}^{\,*}$. Seine korrekte Bezeichnung wäre: „Ortsvektor des Punktes P, bezogen auf den Ursprung R, angegeben im Relativsystem $\mathcal{K}_R^*$“. Er lässt sich aus einem Vektor des Inertialsystems wie folgt berechnen

$$\vec{r}^{\,*}_{RP} = \underline{\underline{Q}}\ \vec{r}_{RP} \qquad \text{where /mit} \qquad \underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}.$$

A reverse transformation is defined as:

Eine Transformation in umgekehrter Richtung lautet dann

$$\vec{r}_{RP} = \underline{\underline{Q}}^*\ \vec{r}^{\,*}_{RP} \qquad \text{where /mit} \qquad \underline{\underline{Q}}^* = \begin{pmatrix} q^*_{11} & q^*_{12} & q^*_{13} \\ q^*_{21} & q^*_{22} & q^*_{23} \\ q^*_{31} & q^*_{32} & q^*_{33} \end{pmatrix}.$$

It is

Es gilt

$$\underline{\underline{Q}}^* = \underline{\underline{Q}}^T; \qquad \underline{\underline{Q}}^{*T} = \underline{\underline{Q}}.$$

It is sufficient to reflect a matrix along its main diagonal (to transpose it) to reverse the effective direction of a transformation matrix.

Ein Spiegeln an der Hauptdiagonale der Matrix (Transponieren) genügt also, um die Wirkrichtung der Transformationsmatrix umzukehren.

To derive the transformation matrix very intelligibly, we will perform the possible movement between our two coordinate systems in three seperate steps. In every step only one movement according to one cardanic angle is allowed. Hence we momentarily need two more relative coordinate systems, each of which can only rotate around one axis of the former system

1. Rotation according to α, $\mathcal{K}_O$ transforms to $\mathcal{K}'_R$,
2. Rotation according to β, $\mathcal{K}'_R$ transforms to $\mathcal{K}^o_R$,
3. Rotation according to γ, $\mathcal{K}^o_R$ transforms to $\mathcal{K}^*_R$.

Um die einzelnen Transformationselemente der Transformationsmatrix anschaulich herleiten zu können, wird die räumliche Verdrehung der beiden Koordinatensysteme zueinander in drei Schritten vollzogen. Es wird bei jedem Schritt nur um einen Kardanischen Winkel gedreht. Infolgedessen ist es nötig, vorübergehend weitere Relativsysteme zu definieren, die jeweils nur um einen Winkel zum vorherigen verdreht werden.

1. Drehung um α, $\mathcal{K}_O$ geht über in $\mathcal{K}'_R$,
2. Drehung um β, $\mathcal{K}'_R$ geht über in $\mathcal{K}^o_R$,
3. Drehung um γ, $\mathcal{K}^o_R$ geht über in $\mathcal{K}^*_R$.

The relative coordinate systems $\mathcal{K}'_R$ are $\mathcal{K}^o_R$ are only momentarily of use whilst the absolute coordinate system $\mathcal{K}_O$ and the last relative coordinate system $\mathcal{K}^*_R$ are the systems already known.

Die Relativsysteme $\mathcal{K}'_R$ und $\mathcal{K}^o_R$ haben nur vorübergehende Bedeutung, während Inertialsystem $\mathcal{K}_O$ und Relativsystem $\mathcal{K}^*_R$ die schon bekannten Systeme sind.

It is / Es gilt

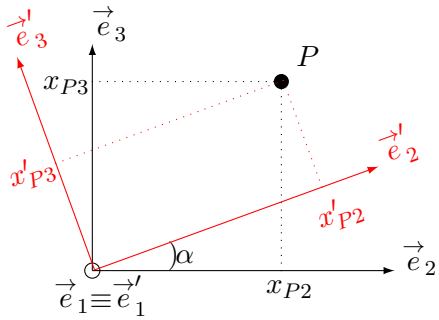
$$x_{Pi} = \sum_j q'^{\alpha}_{ij}\, x'_{Pj}$$

and / und

$$q'^{\alpha}_{ij} = \cos(\vec{e}_i;\ \vec{e}'_j)$$

where /mit

$$(i, j = 1, 2, 3).$$



We can derive the transformation matrix for a rotation of the absolute coordinate system $\mathcal{K}_O$ to the relative coordinate system $\mathcal{K}'_R$ according to α as

Die Transformationsmatrix für die Drehung des Inertialsystems $\mathcal{K}_O$ zum Relativsystem $\mathcal{K}'_R$ um den Winkel α lautet

$$\underline{\underline{Q}}'^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) \\ 0 & \cos-(\frac{\pi}{2}-\alpha) & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

We know that

Mit folgenden Zusammenhängen

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha; \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$$

so we can reduce to

kann vereinfacht werden.

$$\underline{\underline{Q}}'^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

We turn the new system $\mathcal{K}'_R$ around $\vec{e}'_2$ according to the angle β; in doing so we reach the system $\mathcal{K}^o_R$.

Das neue System $\mathcal{K}'_R$ wird an $\vec{e}'_2$ um den Winkel β verdreht; dadurch wird das System $\mathcal{K}^o_R$ erreicht.

It is / Es gilt

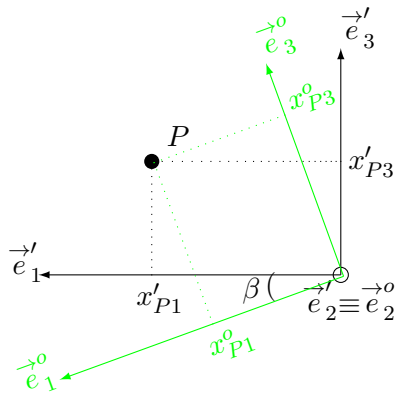
$$x'_{Pj} = \sum_k q^o_{jk}{}^{\beta}\, x^o_{Pk}$$

and / und

$$q^o_{jk}{}^{\beta} = \cos(\vec{e}'_j;\ \vec{e}^o_k)$$

where /mit

$$(j, k = 1, 2, 3).$$



The transformation matrix is now

Die Transformationsmatrix lautet nun

$$\underline{\underline{Q}}^{o\beta} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \cos(-\frac{\pi}{2}+\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\beta) & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

We reduce again, which leads to

Die Vereinfachung ergibt

$$\underline{\underline{Q}}^{o\beta} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

We turn the new system $\mathcal{K}_R^o$ around $\vec{e}_3^{\,o}$ according to the angle γ; in doing so we reach the system $\mathcal{K}_R^*$.

Das neue System $\mathcal{K}_R^o$ wird an $\vec{e}_3^{\,o}$ um den Winkel γ verdreht; dadurch wird das System $\mathcal{K}_R^*$ erreicht.

It is / Es gilt

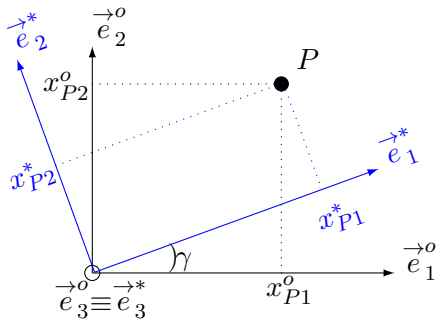
$$x_{Pk}^o = \sum_\ell q_{k\ell}^{*\,\gamma}\, x_{P\ell}^*$$

and / und

$$q_{k\ell}^{*\,\gamma} = \cos(\vec{e}_k^{\,o};\ \vec{e}_\ell^{\,*})$$

where /mit

$$(k, \ell = 1, 2, 3).$$



The transformation matrix is now

Die Transformationsmatrix lautet nun

$$\underline{\underline{Q}}^{*\gamma} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The stepwise transformation can be subsumed, we find

Die schrittweise Transformation kann auch zusammengefasst werden. Es gilt

$$\vec{r} = \underline{\underline{Q}}'^{\alpha} \cdot \underline{\underline{Q}}^{o\beta} \cdot \underline{\underline{Q}}^{*\gamma} \cdot \vec{r}^{\,*}\ .$$

The product of all partial transformation matrices is

Das Produkt der Teiltransformationsmatrizen kann zusammengefasst werden und lautet dann

$$\underline{\underline{Q}}^* = \underline{\underline{Q}}'^{\alpha} \cdot \underline{\underline{Q}}^{o\beta} \cdot \underline{\underline{Q}}^{*\gamma}.$$

We obtain

Eine Ausmultiplikation ergibt

$$\underline{\underline{Q}}^* = \begin{pmatrix} \cos\beta\,\cos\gamma & -\cos\beta\,\sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma + \cos\alpha\,\sin\gamma & -\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma + \cos\alpha\,\cos\gamma & -\sin\alpha\,\cos\beta \\ -\cos\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma + \sin\alpha\,\sin\gamma & \cos\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma + \sin\alpha\,\cos\gamma & \cos\alpha\,\cos\beta \end{pmatrix}. \tag{I.1}$$

Often we have to consider a common special case. The cardanic angle γ describes the circular motion of the rotor according to

Häufig muss ein relativ einfacher Spezialfall behandelt werden. Der Kardanische Winkel γ beschreibt die Drehbewegung eines Rotors mit

$$\gamma = \Omega\, t.$$

The remaining cardanic angles α and β describe the usually small angular displacement of the rotor in its elastic bearings. We will remember that even an apparently stiff bearing is of elastic nature. It is only a question of accuracy in observation.

Die verbleibenden Kardanischen Winkel α und β beschreiben die in der Regel kleinen Winkelauslenkungen des elastisch gelagerten Rotors. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass auch eine vermeintlich starre Lagerung elastische Eigenschaften hat; es ist nur eine Frage der Betrachtungsgenauigkeit.

For elastic bearings which we can find in washing machines or centrifuges as well as for apparently stiff bearings we can presume

Sowohl für eine elastische Lagerung, wie sie bei einer Waschmaschine oder einer Zentrifuge anzutreffen ist, als auch für die vermeintlich starre Lagerung kann angenommen werden, dass

$$\sin\alpha \approx \alpha; \qquad \cos\alpha \approx 1; \qquad \sin\beta \approx \beta; \qquad \cos\beta \approx 1 \qquad \alpha\cdot\beta \approx 0.$$

We can see that we will neglect (linearise) the product of two small quantities

Das multiplikative Aufeinandertreffen kleiner Größen wird also vernachlässigt bzw. linearisiert.

If we linearise in this way the transformation matrix becomes reduced to

Unter Berücksichtigung dieser Linearisierungen vereinfacht sich die Transformationsmatrix zu

$$\underline{\underline{Q}}^* = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t & \beta \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & -\alpha \\ \begin{matrix}-\beta\,\cos\Omega t \\ +\alpha\,\sin\Omega t\end{matrix} & \begin{matrix}\beta\,\sin\Omega t \\ +\alpha\,\cos\Omega t\end{matrix} & 1 \end{pmatrix}. \tag{I.2}$$

1.3 Kinematics of a Rigid Body in the Relative Coordinate System

Kinematik des starren Körpers im Relativsystem

1.3.1 Term of the Vectorial Angular Frequency

Begriff der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit

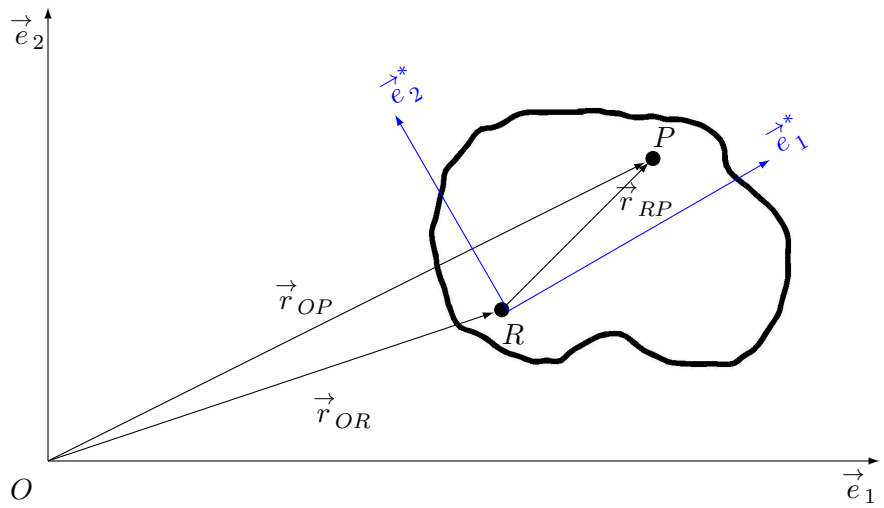
We consider the velocity of point P which belongs to an arbitrary rigid body in the absolute coordinate system.

Betrachtet sei die Geschwindigkeit des Punktes P eines beliebigen Körpers im Inertialsystem.

$$\vec{v}_{OP} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}_{OP}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{r}}_{OP} \tag{I.3}$$

Now we want to describe this velocity in the relative system, i.e. we transform the velocity into the relative system

Diese Geschwindigkeit soll nun im Relativsystem dargestellt werden, d. h. sie soll ins Relativsystem transformiert werden.



We easily find the relation of our position vectors in the absolute coordinate system $\mathcal{K}_O$

Für die Ortsvektoren im Inertialsystem $\mathcal{K}_O$ gilt der einfache Zusammenhang

$$\vec{r}_{OP} = \vec{r}_{OR} + \vec{r}_{RP} \,.$$

By formal derivation with respect to time we find

Es folgt durch formale Differentiation nach der Zeit

$$\dot{\vec{r}}_{OP} = \dot{\vec{r}}_{OR} + \dot{\vec{r}}_{RP}. \tag{I.4}$$

With the rule of transformation

Mit der Transformationsvorschrift

$$\vec{r}_{RP} = \underline{\underline{Q}}^* \; \vec{r}^{\,*}_{RP} \tag{I.5}$$

we can calculate the rather complicated quantity $\vec{r}_{RP}$ of a moving body out of the quantity $\vec{r}^{\,*}_{RP}$ that is constant in the relative system.

kann die bei einem bewegten Körper komplizierte Größe $\vec{r}_{RP}$ aus der im Relativsystem konstanten Größe $\vec{r}^{\,*}_{RP}$ berechnet werden.

Hence

Es gilt daher

$$\dot{\vec{r}}_{OP} = \dot{\vec{r}}_{OR} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\underline{\underline{Q}}^* \; \vec{r}^{\,*}_{RP}\right).$$

Using the product rule we find

Unter Anwendung der Produktregel folgt

$$\dot{\vec{r}}_{OP} = \dot{\vec{r}}_{OR} + \dot{\underline{\underline{Q}}}^* \; \vec{r}^{\,*}_{RP} + \underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}. \tag{I.6}$$

The vector $\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}$ represents the velocity of P against $\mathcal{K}^*_R$, noted in $\mathcal{K}^*_R$. If P is fixed to the rigid body we obtain

Der Vektor $\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}$ ist die Geschwindigkeit von P gegenüber $\mathcal{K}^*_R$, angegeben in $\mathcal{K}^*_R$. Ist P körperfest, so gilt

$$\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet} = 0.$$

Consider: It is important to regard the sequence of the accents of $\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}$. $\vec{r}_{RP}$ must be transformed first, which leads to $\vec{r}^{\,*}_{RP}$. Subsequently we derive with respect to time. A contrary order of the operations leads to a different result:

Hinweis: Es ist zu berücksichtigen, dass bei der Größe $\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}$ die Reihenfolge der Akzente von Bedeutung ist. $\vec{r}_{RP}$ wird zunächst transformiert, daraus entsteht $\vec{r}^{\,*}_{RP}$ und anschließend zeitlich abgeleitet. Eine umgekehrte Reihenfolge der Operationen würde zu einem anderen Ergebnis führen:

$$\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet} \neq \left(\dot{\vec{r}}_{RP}\right)^{*}.$$

Transformation matrices, as seen before, can have both accents, * and $^\bullet$ as well. But in these cases it is not necessary to regard the sequence of the operations. Now the accent * stands only for "transpose a matrix". This does not affect the behaviour of a matrix with respect to time, as we know.

Bei Transformationsmatrizen, die, wie eben gesehen auch mit den Akzenten * und $^\bullet$ versehen sein können, ist eine Unterscheidung nicht notwendig, da ja der Akzent * hier lediglich ein Transponieren (Spiegeln an der Hauptdiagonalen) bedeutet. Dies hat bekannterweise auf das zeitliche Verhalten der veränderten Matrix keinen Einfluss.

Using eq. (I.6) and

Aus Gleichung (I.6) folgt mit

$$\vec{r}^{\,*}_{RP} = \underline{\underline{Q}}\ \vec{r}_{RP}$$

we find

der Zusammenhang

$$\dot{\vec{r}}_{OP} = \dot{\vec{r}}_{OR} + \underline{\underline{\dot{Q}}}^{*}\ \underline{\underline{Q}}\ \vec{r}_{RP} + \underline{\underline{Q}}^{*}\ \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}. \tag{I.7}$$

One term of eq. (I.7) gets a tellingly notation:

$\underline{\underline{Q}}^{*}\ \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}$: Relative velocity.

Ein Term der Gleichung (I.7) erhält eine treffende Bezeichnung:

$\underline{\underline{Q}}^{*}\ \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}$: Relativgeschwindigkeit.

Another term of the same equation experiences a redefinition:

Ein anderer Term derselben Gleichung widerfährt eine Umdefinition:

$$\underline{\underline{\dot{Q}}}^{*}\ \underline{\underline{Q}}\ \vec{r}_{RP} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{w} \times \vec{r}_{RP}\ . \tag{I.8}$$

It is

$\vec{w}$: vectorial angular frequency

Hierbei gilt

$\vec{w}$: Vektor der Winkelgeschwindigkeit

and furthermore

und weiter

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{or as well / oder auch} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \tag{I.9}$$

When we know the transformation matrix we can explicitly define the vectorial angular frequency:

Bei bekannter Transformationsmatrix ist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit eindeutig festgelegt:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{q}_{12}\, q_{13} - \dot{q}_{22}\, q_{23} - \dot{q}_{32}\, q_{33} \\ \dot{q}_{11}\, q_{13} + \dot{q}_{21}\, q_{23} + \dot{q}_{31}\, q_{33} \\ -\dot{q}_{11}\, q_{12} - \dot{q}_{21}\, q_{22} - \dot{q}_{31}\, q_{23} \end{pmatrix} . \tag{I.10}$$

Using eq. (I.8) and $\underline{\underline{Q}}\ \vec{r}_{RP} = \vec{r}^{\,*}_{RP}$ we obtain

Mit Hilfe von Gleichung (I.8) und dem Zusammenhang $\underline{\underline{Q}}\ \vec{r}_{RP} = \vec{r}^{\,*}_{RP}$ gilt auch

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{Q}}}^{*}\ \vec{r}^{\,*}_{RP} &= \vec{w} \times \vec{r}_{RP} \\ &= \underline{\underline{Q}}^{*}\ \vec{w}^{*} \times \underline{\underline{Q}}^{*}\ \vec{r}^{\,*}_{RP} \\ &= \underline{\underline{Q}}^{*} \left(\vec{w}^{*} \times \vec{r}^{\,*}_{RP} \right) . \end{aligned}$$

Hence

Daraus folgt

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{\dot{Q}}}^{*}\ \vec{r}^{\,*}_{RP} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{w}^{*} \times \vec{r}^{\,*}_{RP} .$$

We can see that there is also a vectorial angular frequency $\vec{w}^{*}$ which is noted in the relative system

Demzufolge existiert auch ein Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{w}^{*}$, der im Relativsystem notiert wird

$$\vec{w}^{*} = \begin{pmatrix} \omega_1^{*} \\ \omega_2^{*} \\ \omega_3^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_{21}\, q_{31} + \dot{q}_{22}\, q_{32} + \dot{q}_{23}\, q_{33} \\ -\dot{q}_{11}\, q_{31} - \dot{q}_{12}\, q_{32} - \dot{q}_{13}\, q_{33} \\ \dot{q}_{11}\, q_{21} + \dot{q}_{12}\, q_{22} + \dot{q}_{13}\, q_{32} \end{pmatrix} . \tag{I.11}$$

The distinction between $\vec{w}^{*}$ and $\vec{w}$ is that the order of all double subscripts is reversed and all algebraic signs get changed.
With the transformation matrix we derived for the above special case according to eq. (I.2) we will obtain the vectorial angular frequencies as

Er unterscheidet sich von $\vec{w}$ dadurch, dass alle Indizes in ihrer Reihenfolge vertauscht werden sowie alle Vorzeichen.
Mit den für einen Spezialfall vereinfachten Transformationsmatrizen nach Gleichung (I.2) gilt für die beiden Winkelgeschwindigkeitsvektoren

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} + \beta\,\Omega \\ \dot{\beta} - \alpha\,\Omega \\ \Omega \end{pmatrix} \qquad \text{and / und} \tag{I.12}$$

$$\vec{w}^{*} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}\ \sin\Omega t + \dot{\alpha}\ \cos\Omega t \\ \dot{\beta}\ \cos\Omega t - \dot{\alpha}\ \sin\Omega t \\ \Omega \end{pmatrix} . \tag{I.13}$$

Remark: When deriving the vectorial angular frequencies we linearise again according to $\alpha \cdot \beta \approx 0$ as well as $\alpha \cdot \dot{\alpha} \approx 0$ etc.

Anmerkung: Auch bei der Herleitung dieser Winkelgeschwindigkeitsvektoren werden Linearisierungen vorgenommen, z. B. $\alpha \cdot \beta \approx 0$ und auch $\alpha \cdot \dot{\alpha} \approx 0$ etc.

By the way: By using the equations (I.6) and (I.8) we can derive the EULERian[2] formula of relative kinematics

Nebenbei: Aus Gleichung (I.6) und Gleichung (I.8) folgt die EULER'sche[2] Formel der Relativkinematik

$$\dot{\vec{r}}_{OP} = \dot{\vec{r}}_{OR} + \vec{w} \times \vec{r}_{RP} . \tag{I.14}$$

1.4 Newton's Second Laws of Motion in Terms of Relative Coordinate Systems

We want to express the three-dimensional motion of rigid bodies in terms of relative coordinate systems using NEWTON's[4] Second Law of Motion in Translation and Rotation. When doing so we will allow the motion of an arbitrary point against the relative coordinate system

Hauptsätze der Körperdynamik in den Koordinaten von Relativsystemen

Es sollen die räumlichen Bewegungen von starren Körper durch Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz, bezogen auf ein körperfestes Koordinatensystem beschrieben werden. Dabei soll es auch möglich sein, dass sich ein Punkt P gegenüber dem Relativsystem bewegt. Abgekürzt formuliert wird „die Bewegung eines Massenpunktes im Relativsystem“ betrachtet.

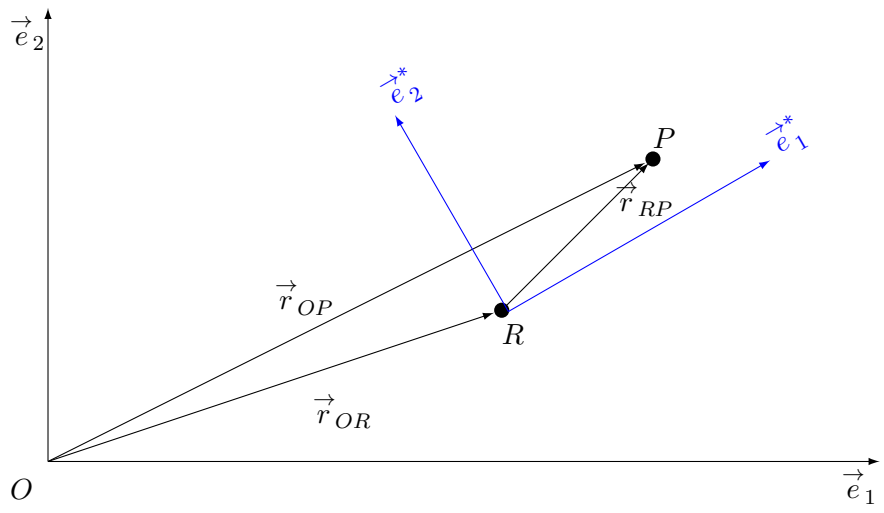
1.4.1 Newton's Second Law in Translation in Terms of

Schwerpunktsatz in den Koordinaten von

[2] Leonhard EULER (* 15 April 1707 in Basel; † 18 September 1783 in St. Petersburg); mathematician. EULER worked in almost all areas of mathematics: geometry, calculus, trigonometry, algebra, and number theory. His importance in the history of mathematics cannot be overstated.
EULER introduced and popularized several notational conventions through his numerous and widely circulated textbooks. Most notably, he introduced the concept of a function and was the first to write $f(x)$ to denote the function f applied to the argument x. He also introduced the modern notation for the trigonometric functions, the letter e for the base of the natural logarithm (now also known as EULER's number), the Greek letter $\sum$ for summations and the letter i to denote the imaginary unit. The use of the Greek letter π to denote the ratio of a circle's circumference to its diameter was also popularized by EULER, although it did not originate with him.
He discovered ways to express various logarithmic functions in terms of power series, and successfully defined logarithms for negative and complex numbers. He also defined the exponential function for complex numbers and discovered its relation to the trigonometric functions.
EULER also pioneered the use of analytic methods to solve number theory problems.
EULER helped develop the EULER - BERNOULLI beam equation, which became a cornerstone of engineering. (Source: www.en.wikipedia.org, 2007)

Leonhard EULER (* 15. April 1707 in Basel; † 18. September 1783 in St. Petersburg); Mathematiker. EULER war auf nahezu allen Gebieten der Mathematik tätig: u.a. Geometrie, Analysis, Trigonometrie, Algebra und Zahlentheorie. Sein Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik ist außerordentlich.
Viele mathematische Symbole und Schreibweisen wurden von EULER eingeführt und durch seine zahlreichen Lehrbücher verbreitet. Er begründete die Schreibweise für Funktionen $f(x)$ um zu verdeutlichen, dass eine Funktion f auf ein Argument x angewendet werden soll. Auch führte er die immer noch gültige Schreibweise für trigonometrische Funktionen ein, den Buchstaben e für die Basis des natürlichen Logarithmus (jetzt EULERsche Zahl), das Symbol $\sum$ für Summen und den Buchstaben i für die komplexe Einheit. Vor ihm war es schon gelegentlich gebräuchlich mit π das Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser zu bezeichnen aber erst durch EULER wurde diese Bezeichnung allgemein verbreitet.
Er fand Möglichkeiten, verschiedene Logarithmusfunktionen aus Potenzreihen zu entwickeln, außerdem definierte er die Logarithmen von negativen und komplexen Zahlen. Ferner definierte er die Exponentialfunktion für komplexe Zahlen und fand ihre Verwandschaft zu den trigonometrischen Funktionen heraus.
EULER wandte als erster analytische Methoden an, um Probleme der Zahlentheorie zu lösen.
Auch war EULER daran beteiligt, die EULER - BERNOULLIsche DGL der Balkenbiegung zu entwickeln, sie ist nach wie vor ein Eckpfeiler der Festigkeitslehre. (Quelle: www.en.wikipedia.org, 2007)

Relative Coordinate Systems **Relativsystemen**



First we want to describe the velocity of point P in various coordinate systems.

Zunächst soll die Geschwindigkeit des Punktes P in verschiedenen Koordinatensystemen dargestellt werden.

$\vec{v}_{OP} = \dot{\vec{r}}_{OP}$	: velocity of P against O in terms of $\mathcal{K}_O$	Geschwindigkeit von P gegenüber O in den Koordinaten von $\mathcal{K}_O$
$\vec{v}^{\,*}_{OP} = (\dot{\vec{r}}_{OP})^*$	: velocity of P against O in terms of $\mathcal{K}^*_R$	Geschwindigkeit von P gegenüber O in den Koordinaten von $\mathcal{K}^*_R$
$\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^\bullet$	: velocity of P against R in terms of $\mathcal{K}^*_R$	Geschwindigkeit von P gegenüber R in den Koordinaten von $\mathcal{K}^*_R$
$\underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^\bullet$	: velocity of P against R in terms of $\mathcal{K}_O$	Geschwindigkeit von P gegenüber R in den Koordinaten von $\mathcal{K}_O$

Applying eq. (I.7) we obtain

Mit Hilfe der Gleichung (I.7) kann gefolgert werden

$$\dot{\vec{r}}_{OP} = \dot{\vec{r}}_{OR} + \vec{w} \times \vec{r}_{RP} + \underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^\bullet .$$

We transform this relation into the relative coordinate system $\mathcal{K}^*_R$:

Dieser Zusammenhang kann ins Relativsystem $\mathcal{K}^*_R$ transformiert werden:

$$\underline{\underline{Q}}\,\dot{\vec{r}}_{OP} = \underline{\underline{Q}}\,\dot{\vec{r}}_{OR} + \underline{\underline{Q}}\,(\vec{w} \times \vec{r}_{RP}) + \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^\bullet .$$

Applying our usual notation we have

Durch die Anwendung der vereinbarten Bezeichnungen entsteht daraus

$$(\dot{\vec{r}}_{OP})^* = (\dot{\vec{r}}_{OR})^* + \vec{w}^* \times \vec{r}^{\,*}_{RP} + \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^\bullet ,$$

$$\begin{aligned}\underbrace{(\dot{\vec{r}}_{OP})^* - (\dot{\vec{r}}_{OR})^*} &= \vec{w}^* \times \vec{r}^*_{RP} + \left(\vec{r}^*_{RP}\right)^\bullet, \\ \left(\dot{\vec{r}}_{RP}\right)^* &= \vec{w}^* \times \vec{r}^*_{RP} + \left(\vec{r}^*_{RP}\right)^\bullet. \end{aligned} \tag{I.15}$$

To calculate the velocity of point P we use eq. (I.7)

Zur Berechnung der Geschwindigkeit des Punktes P wird von Gleichung (I.7) ausgegangen:

$$\dot{\vec{r}}_{OP} = \dot{\vec{r}}_{OR} + \vec{w} \times \vec{r}_{RP} + \underline{\underline{Q}}^* \frac{\mathrm{d}\ \vec{r}^*_{RP}}{\mathrm{d}\,t}.$$

We denote

Dabei ist

$\dot{\vec{r}}_{OP} = \vec{v}_{OP}$: absolute velocity of P against O in terms of $\mathcal{K}_O$,

Absolutgeschwindigkeit von P gegenüber O in den Koordinaten von $\mathcal{K}_O$,

$\underline{\underline{Q}}^* \frac{\mathrm{d}\ \vec{r}^*_{RP}}{\mathrm{d}\,t}$: relative velocity of P against R in terms of $\mathcal{K}_O$.

Relativgeschwindigkeit von P gegenüber R in den Koordinaten von $\mathcal{K}_O$.

In case of P being fixed to a rigid body we have

Falls P Punkt eines starren Körpers ist, gilt

$$\frac{\mathrm{d}\ \vec{r}^*_{RP}}{\mathrm{d}\,t} = 0.$$

Now we want to describe the acceleration of point P:

Nunmehr soll die Beschleunigung des Punktes P angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{OP} &= \frac{\mathrm{d}\ \vec{v}_{OP}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}^2\ \vec{r}_{OP}}{\mathrm{d}\,t^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\vec{v}_{OR} + \vec{w} \times \vec{r}_{RP} + \underline{\underline{Q}}^* \frac{\mathrm{d}\ \vec{r}^*_{RP}}{\mathrm{d}\,t}\right) \\ &= \dot{\vec{v}}_{OR} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}_{RP} + \vec{w} \times \dot{\vec{r}}_{RP} + \dot{\underline{\underline{Q}}}^* \left(\vec{r}^*_{RP}\right)^\bullet + \underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^*_{RP}\right)^{\bullet\bullet}. \end{aligned} \tag{I.16}$$

Using eq. (I.15), now however noted in the absolute coordinate system, we obtain $\dot{\vec{r}}_{RP}$ as

Mit Gleichung (I.15), diesmal allerdings im Inertialsystem notiert, gilt für $\dot{\vec{r}}_{RP}$

$$\dot{\vec{r}}_{RP} = \vec{w} \times \vec{r}_{RP} + \underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^*_{RP}\right)^\bullet.$$

Hence

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{a}_{OP} = \frac{\mathrm{d}\ \vec{v}_{OR}}{\mathrm{d}\,t} &+ \dot{\vec{w}} \times \vec{r}_{RP} + \vec{w} \times \left(\vec{w} \times \vec{r}_{RP}\right) \\ &+ \vec{w} \times \underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^*_{RP}\right)^\bullet + \underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^*_{RP}\right)^{\bullet\bullet} \\ &+ \dot{\underline{\underline{Q}}}^* \underline{\underline{Q}}\, \underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^*_{RP}\right)^\bullet. \end{aligned}$$

The term $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^*$ appears without reason which is however possible, because

Das unvermittelte Auftauchen des Faktors $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^*$ ist zulässig, da gilt:

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^* = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{E}}$$

and, as we know, the unit matrix $\underline{\underline{E}}$ is the neutral element with regard to muliplication.

und die Einheitsmatrix $\underline{\underline{E}}$ ist bekannterweise das neutrale Element bezüglich Multiplikation.

Using eq. (I.8) we obtain

Unter Anwendung von Gleichung (I.8) sei

$$\dot{\underline{\underline{Q}}}^*\,\underline{\underline{Q}}\left(\underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}\right) = \vec{w}\times\underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}.$$

Hence

Daraus aber folgt

$$\vec{a}_{OP} = \dot{\vec{v}}_{OR} + \dot{\vec{w}}\times\vec{r}_{RP} + \vec{w}\times\left(\vec{w}\times\vec{r}_{RP}\right) + 2\,\vec{w}\times\underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet} + \underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet\bullet}. \tag{I.17}$$

We will find the derivative with respect to time of the vectorial angular frequency soon. Thus we should check whether we have to discriminate between $(\vec{w}^{\,*})^{\bullet}$ and $(\dot{\vec{w}})^*$. Applying the calculation rule according to eq. (I.15) on $\vec{w}$ instead of $\vec{r}_{RP}$ we obtain

Da in Kürze auch der Winkelgeschwindigkeitsvektor in zeitlicher Ableitung auftauchen wird, soll überprüft werden, ob ein Unterschied zwischen $(\vec{w}^{\,*})^{\bullet}$ und $(\dot{\vec{w}})^*$ besteht. Wenn die Rechenvorschrift aus Gleichung (I.15) für $\vec{w}$ anstelle für $\vec{r}_{RP}$ angewandt wird, ergibt sich:

$$(\dot{\vec{w}})^* = \vec{w}^{\,*}\times\vec{w}^{\,*} + (\vec{w}^{\,*})^{\bullet}.$$

As we know

Da aber allgemein gilt

$$\vec{r}\times\vec{r} = \vec{0},$$

so the sequence of the operations "transform" and "derive" is irrelevant in this case.

folgt daraus, dass die Reihenfolge der Operationen „Transformieren“ und „Ableiten“ bei Winkelgeschwindigkeitsvektoren unerheblich ist.

$$(\dot{\vec{w}})^* = (\vec{w}^{\,*})^{\bullet} = \dot{\vec{w}}^{\,*}.$$

Knowing this we can express the acceleration $\vec{a}_{OP}$ as

Mit dieser Erkenntnis lautet die Beschleunigung $\vec{a}_{OP}$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{OP} = \dot{\vec{v}}_{OR} \;&+\; \underline{\underline{Q}}^*\left(\dot{\vec{w}}^{\,*}\times\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)\\ &+\; \underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{w}^{\,*}\times(\vec{w}^{\,*}\times\vec{r}^{\,*}_{RP})\right)\\ &+\; \underline{\underline{Q}}^*\left(2\,\vec{w}^{\,*}\times\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}\right)\\ &+\; \underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet\bullet}.\end{aligned} \tag{I.18}$$

We denote

Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:

$\vec{a}_{OP}$:	absolute acceleration of P against O in terms of $\mathcal{K}_O$,	Absolutbeschleunigung von P gegenüber O in den Koordinaten von $\mathcal{K}_O$,
$\dot{\vec{v}}_{OR}$:	acceleration of R against O in terms of $\mathcal{K}_O$,	Beschleunigung von R gegenüber O in den Koordinaten von $\mathcal{K}_O$,
$\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}_{RP})$:	additional centripetal acceleration in case of $P \neq R$,	Zusätzliche Zentripetalbeschleunigung für den Fall, dass gilt $P \neq R$,
$2\ \vec{w} \times \underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet} = \vec{a}_c$:	Coriolis acceleration, [3]	Coriolisbeschleunigung, [3]
$\underline{\underline{Q}}^* \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet\bullet} = \vec{a}_{rel}$:	relative acceleration.	Relativbeschleunigung.

The subsumption of the first three terms in eq. (I.18) will be called "guidance acceleration" $\vec{a}_f$.

Die Zusammenfassung der ersten drei Terme der Absolutbeschleunigung aus Gleichung (I.18) wird Führungsbeschleunigung $\vec{a}_f$ genannt.

$$\vec{a}_f = \dot{\vec{v}}_{OR} + \dot{\vec{w}} \times \vec{r}_{RP} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}_{RP}).$$

[3]

Gaspard Gustave de Coriolis (* 21 May 1792 in Nancy; † 19 September 1843 in Paris); French mathematician and mechanical engineer. He is best known for his work on the Coriolis Effect. Coriolis was the first to coin the term "work" for the scalar product of force and distance.
In 1829 Coriolis published a textbook, *Calcul de l'Effet des Machines* (Calculation of the Effect of Machines), which presented mechanics in a way that could readily be applied by industry. In this period the correct expression for kinetic energy and its relation to mechanical work became established.
During the following years Coriolis worked to extend the notion of kinetic energy and work to rotating systems. The first of his papers, *Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines* (On the principle of kinetic energy in the relative motion in machines), was read to the Académie des Sciences (Coriolis 1832). Three years later came the paper that would make his name famous, *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps* (On the equations of relative motion of a system of bodies). Coriolis's papers do not deal with the atmosphere or even the rotation of the earth, but with the transfer of energy in rotating systems like waterwheels.
Coriolis's name began to appear in the meteorological literature at the end of the nineteenth century, although the term "Coriolis force" was not used until the beginning of the twentieth century. (Source: www.en.wikipedia.org, 2007)

Gaspard Gustave de Coriolis (* 21. Mai 1792 in Nancy; † 19. September 1843 in Paris); Französischer Mathematiker und Ingenieur. Berühmt wurde er wegen seiner Arbeiten zum sog. Corioliseffekt. Coriolis prägte als erster den Begriff der Arbeit für das Skalarprodukt aus Kraft und Weg.
1829 veröffentlichte Coriolis sein Lehrbuch *Calcul de l'Effet des Machines* (Berechnung der Wirkung von Maschinen), in dem er die Technische Mechanik auf eine Art darstellte, dass die Berechnungen in der betrieblichen Praxis direkt anwendbar waren. In dieser Zeit wurde der Begriff der kinetischen Energie eingeführt und der Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und mechanischer Arbeit erkannt.
In den folgenden Jahren arbeitete Coriolis daran, die Begriffe kinetische Energie und Arbeit auch bei rotierenden Systemen anzuwenden. Seine erste Veröffentlichung darüber, *Sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines* (Über das Prinzip der kinetischen Energie bei Relativbewegungen in Maschinen), wurde 1832 an der Académie des Sciences vorgestellt. Drei Jahre später erschien die Veröffentlichung, die ihn letztendlich berühmt machte: *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps* (Bewegungsgleichungen bei Relativbewegungen von Mehrkörpersystemen). Coriolis äußerte sich in seinen Veröffentlichungen nie zu den Geschehnissen in der Atmosphäre oder auch nur über die Erdrotation. Er behandelte vielmehr die Energieübertragung in rotierenden Systemen, wie z. B. Wasserrädern.
Der Name Coriolis tauchte erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts in der meteorologischen Literatur auf. Allerdings wurde der Begriff der „Corioliskraft“ erst anfangs des 20. Jahrhunderts geprägt. (Quelle: www.en.wikipedia.org, 2007)

Knowing the absolute acceleration we are able to express NEWTON's [4] Second Law of Motion in Translation

Mit Kenntnis der Absolutbeschleunigung lässt sich das NEWTON'sche [4] Grundgesetz formulieren

$$\vec{F} = m\ \vec{a}_{OP},$$

written out we get

das ausgeschrieben lautet:

$$\begin{aligned}
\vec{F} = \underline{\underline{Q}}^{*}\ \vec{F}^{*} = m\,\dot{\vec{v}}_{OR} \quad &+ \quad m\,\underline{\underline{Q}}^{*}\left(\dot{\vec{w}}^{*} \times \vec{r}^{\,*}_{RP}\right) \\
&+ \quad m\,\underline{\underline{Q}}^{*}\left(\vec{w}^{*} \times (\vec{w}^{*} \times \vec{r}^{\,*}_{RP})\right) \\
&+ \quad m\,\underline{\underline{Q}}^{*}\left(2\ \vec{w}^{*} \times \left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet}\right) \\
&+ \quad m\,\underline{\underline{Q}}^{*}\left(\vec{r}^{\,*}_{RP}\right)^{\bullet\bullet}.
\end{aligned} \tag{I.19}$$

Considering the centre of gravity S instead of point P and using a slightly different notation we get

Formal gleichen Inhalts ist der Schwerpunktsatz. Lediglich muss der Punkt P durch den Schwerpunkt S ersetzt werden. Gleichzeitig wird eine andere Darstellungsart gezeigt:

$$\begin{aligned}\vec{F}^{*} = \underline{\underline{Q}}\, m\, \dot{\vec{v}}_{OR} \quad &+ \quad m\left(\dot{\vec{w}}^{*} \times \vec{r}^{\,*}_{RS}\right)\\ &+ \quad m\left(\vec{w}^{*} \times (\vec{w}^{*} \times \vec{r}^{\,*}_{RS})\right)\\ &+ \quad m\left(2\,\vec{w}^{*} \times \left(\vec{r}^{\,*}_{RS}\right)^{\bullet}\right)\end{aligned}$$

[4]

Sir Isaac Newton (* 4 January 1643 in Woolsthorpe; † 31 March 1727 in London); English physicist, mathematician, astronomer, natural philosopher, and alchemist, regarded by many as the greatest figure in the history of science. His treatise *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, published in 1687, described universal gravitation and the three laws of motion, laying the groundwork for classical mechanics.
Newton's First Law (also known as the Law of Inertia) states that an object at rest tends to stay at rest and that an object in uniform motion tends to stay in uniform motion unless acted upon by a net external force.
Newton's Second Law states that an applied force, $\vec{F}$, on an object equals the time rate of change of its momentum, $\vec{p} = m\,\vec{v}$. Mathematically, this is written as $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\vec{v}\right)$. Defining the acceleration to be $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ and assuming the mass to be constant, result in the famous equation $\vec{F} = m\,\vec{a}$.
Newton's Third Law states that for every action there is an equal and opposite reaction $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$.
By deriving Kepler's laws of planetary motion from this system, he was the first to show that the motion of objects on Earth and of celestial bodies are governed by the same set of natural laws.
In mechanics, Newton also markedly enunciated the principles of conservation of momentum and angular momentum. In optics, he invented the reflecting telescope and developed a theory of colour based on the observation that a prism decomposes white light into a visible spectrum. Newton notably argued that light is composed of particles. In mathematics, Newton shares the credit with Gottfried Leibniz for the development of calculus (Source: www.en.wikipedia.org, 2007).

Sir Isaac Newton (* 4. Januar 1643 in Woolsthorpe; † 31. März 1727 in London); englischer Physiker, Mathematiker, Astronom, Philosoph und Alchemist. Viele halten ihn für die bedeutendste Person in der Geschichte der Wissenschaft. In seinem 1687 veröffentlichtes Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* beschreibt er das von ihm entwickelte Gravitationsgesetz sowie die drei Newtonschen Axiome der Mechanik. Dieses Werk bildet die Grundlage der klassischen Mechanik.
Das erste Newtonsche Axiom (Trägheitprinzip) besagt, dass ein ruhender Körper in Ruhe bleibt und dass ein sich gleichförmig und geradlinig bewegender Körper diese Bewegung beibehält, solange keine äußere resultierende Kraft auf diesen Körper wirkt.
Das zweite Newtonsche Axiom (Aktionsprinzip) besagt, dass die auf einen Körper wirkende Kraft $\vec{F}$ gleich der zeitlichen Änderung des Impulses $\vec{p} = m\,\vec{v}$ ist. Ausgeschrieben lautet dies: $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\vec{v}\right)$. Mit der Definition der Beschleunigung $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ und bei Annahme einer konstanten Masse m wird daraus die berühmte Formel $\vec{F} = m\,\vec{a}$.
Das dritte Newtonsche Axiom (Reaktionsprinzip) besagt, dass es für jede Kraft eine gleich große Gegenkraft gibt $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$.
Durch die Herleitung der Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung unter Zugrundelegung seiner Prinzipien bewies er, dass die Körper auf der Erde und die Himmelskörper den gleichen mechanischen Gesetzen unterliegen.
Als mechanisches Grundprinzip entwickelte Newton auch den Satz vom Erhalt des Impulses und des Drehimpulses. Auf dem Gebiet der Optik erfand er das Spiegelteleskop und er entwickelte eine Theorie der Farben, die auf der Beobachtung beruhte, dass ein Prisma weißes Licht in ein sichtbares Spektrum zerlegt. Newton vertrat heftig die Auffassung, dass Licht aus Teilchen besteht. Auf dem Gebiet der Mathematik hat Newton etwa zeitgleich mit Gottfried Leibnitz aber unabhängig von ihm die Infinitesimalrechnung entwickelt (Quelle: www.en.wikipedia.org, 2007).

$$+ \quad m \left(\vec{r}^{\,*}_{RS}\right)^{\bullet\bullet} . \tag{I.20}$$

1.4.2 Newton's Second Law in Rotation in Terms of Relative Coordinate Systems

Assuming the Second Law of Motion in Rotation in terms of absolute coordinate systems we may consider two cases:

1. A rigid body may have a fixed centre of rotation which is referred to as O:

Der Impulsmomentensatz in Koordinaten von Relativsystemen

Ausgegangen wird vom Impulsmomentensatz im Inertialsystem. Es gibt hierbei zwei Möglichkeiten:

1. Ein starrer Körper habe einen starren Drehpunkt, er sei mit O bezeichnet:

$$\vec{M}_O = \frac{\mathrm{d}\,\vec{L}_O}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left\{\int_K \vec{r}_{Om} \times (\vec{w} \times \vec{r}_{Om})\,\mathrm{d}\,m\right\} . \tag{I.21}$$

We denote

$\vec{r}_{Om}$: position vector from the centre of rotation O to $\mathrm{d}m$,

$\vec{L}_O = \underline{\underline{J}}_O\,\vec{w}$: angular momentum with respect to centre of rotation O,

$\underline{\underline{J}}_O$: matrix of inertia with respect to centre of rotation O.

Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen

Ortsvektor vom Drehpunkt O zu $\mathrm{d}m$,

Impulsmoment bezüglich Drehpunkt O,

Trägheitsmatrix bezüglich Drehpunkt O.

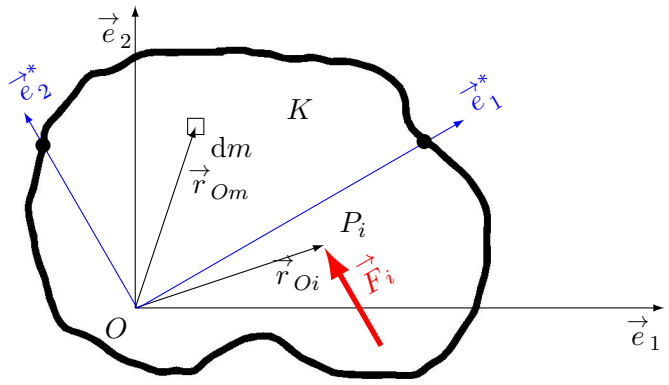
2. A rigid body may be free i.e. it does not have a fixed centre of rotation, in this case the body rotates around its centre of gravity S:

2. Ein starrer Körper habe keinen festen Drehpunkt, er führt dann eine Drehbewegung um seinen Schwerpunkt S aus:

$$\vec{M}_S = \frac{\mathrm{d}\,\vec{L}_S}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left\{\int_K \vec{r}_{Sm} \times (\vec{w} \times \vec{r}_{Sm})\,\mathrm{d}\,m\right\} . \tag{I.22}$$

For equations (I.21) and (I.22) being of the same structure, we will demonstrate the transformation into the relative coordinate system only for eq. (I.21)

Da die Gleichungen (I.21) und (I.22) gleiche Struktur haben, wird die Transformation ins Relativsystem nur in einem Fall anhand Gleichung (I.21) vorgenommen.



It is

Es gilt:

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i = \underline{\underline{Q}}^* \sum_i \vec{r}^{\,*}_{Oi} \times \vec{F}^{\,*}_i = \underline{\underline{Q}}^* \; \vec{M}^{\,*}_O \,.$$

Hence

Demzufolge gilt auch

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_K \vec{r}_{Om} \times (\vec{w} \times \vec{r}_{Om}) \,\mathrm{d}m &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \underline{\underline{Q}}^* \int_K \vec{r}^{\,*}_{Om} \times (\vec{w}^{\,*} \times \vec{r}^{\,*}_{Om}) \,\mathrm{d}m \right\} \\
&= \dot{\underline{\underline{Q}}}^* \int_K \vec{r}^{\,*}_{Om} \times (\vec{w}^{\,*} \times \vec{r}^{\,*}_{Om}) \,\mathrm{d}m \\
&+ \underline{\underline{Q}}^* \int_K \left(\vec{r}^{\,*}_{Om}\right)^{\bullet} \times (\vec{w}^{\,*} \times \vec{r}^{\,*}_{Om}) \,\mathrm{d}m \\
&+ \underline{\underline{Q}}^* \int_K \vec{r}^{\,*}_{Om} \times (\dot{\vec{w}}^{\,*} \times \vec{r}^{\,*}_{Om}) \,\mathrm{d}m \\
&+ \underline{\underline{Q}}^* \int_K \vec{r}^{\,*}_{Om} \times (\vec{w}^{\,*} \times \left(\vec{r}^{\,*}_{Om}\right)^{\bullet}) \,\mathrm{d}m. \qquad \text{(I.23)}
\end{aligned}$$

Knowing that the relative coordinate system $\mathcal{K}^*_R$ is fixed to the body and assuming that the origins O and R of the two coordinate systems are identic ($O \equiv R$) we get

Da das Relativsystem $\mathcal{K}^*_R$ körperfest ist und angenommen wird, dass die Ursprünge O und R deckungsgleich sind ($O \equiv R$), folgt

$$\underline{\underline{Q}}^* \; \vec{M}^{\,*}_O = \dot{\underline{\underline{Q}}}^* \underbrace{\int_K \vec{r}^{\,*}_{Om} \times (\vec{w}^{\,*} \times \vec{r}^{\,*}_{Om}) \,\mathrm{d}m}_{\underline{\underline{J}}^*_O \, \vec{w}^{\,*}} + \underline{\underline{Q}}^* \underbrace{\int_K \vec{r}^{\,*}_{Om} \times (\dot{\vec{w}}^{\,*} \times \vec{r}^{\,*}_{Om}) \,\mathrm{d}m}_{\underline{\underline{J}}^*_O \, \dot{\vec{w}}^{\,*}} \,.$$

Now the whole equation gets multiplied by $\underline{\underline{Q}}$ from the left.

Die gesamte Gleichung wird nun mit $\underline{\underline{Q}}$ vormultipliziert.

$$\vec{M}_O^* = \underline{\underline{Q}}\,\dot{\underline{\underline{Q}}}^* \left(\underline{\underline{J}}_O^* \; \vec{w}^*\right) + \underline{\underline{J}}_O^* \, \dot{\vec{w}}^* .$$

Using eq. (I.8) we find

$$\underline{\underline{Q}}\,\dot{\underline{\underline{Q}}}^* \; \vec{r}^* = \vec{w}^* \times \vec{r}^* ,$$

yielding

$$\vec{M}_O^* = \vec{w}^* \times \left(\underline{\underline{J}}_O^* \; \vec{w}^*\right) + \underline{\underline{J}}_O^* \, \dot{\vec{w}}^* . \tag{I.24}$$

Using NEWTON's Second Law in Rotation with respect to the centre of gravity S as shown in eq. (I.22) we have

$$\vec{M}_S^* = \vec{w}^* \times \left(\underline{\underline{J}}_S^* \; \vec{w}^*\right) + \underline{\underline{J}}_S^* \, \dot{\vec{w}}^* . \tag{I.25}$$

When we keep in mind again that $\mathcal{K}_R^*$ is fixed to the rotating body we see that the matrix of inertia is independent of time. Choosing the relative coordinate system $\mathcal{K}_R^*$ in a way that its unit vectors coincide with the principle axes of the rotating rigid body we find the matrix of inertia as a diagonal matrix:

Da nach Gleichung (I.8) gilt

gilt auch

Für den Impulsmomentensatz mit Bezug auf den Schwerpunkt S aus Gleichung (I.22) gilt entsprechend

Da $\mathcal{K}_R^*$ nach wie vor körperfest ist, sind die Trägheitsmatrizen $\underline{\underline{J}}_O^*$ und $\underline{\underline{J}}_S^*$ zeitunabhängig. Werden die Achsen von $\mathcal{K}_R^*$ so gelegt, dass sie für den Starrkörper Hauptachsen sind, dann erhalten die Trägheitsmatrizen Diagonalform

$$\underline{\underline{J}}_O^* \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{J}}_S^* = \begin{pmatrix} J_A & 0 & 0 \\ 0 & J_A & 0 \\ 0 & 0 & J_P \end{pmatrix} .$$

1.5 Recapitulation

Zusammenfassung

We recapitulate the results of this chapter.

Das Ergebnis diese Kapitels kann wie folgt zusammengefasst werden:

NEWTON's Second Law in Translation with respect to the centre of gravity calculates forces in the relative coordinate system:

Schwerpunktsatz für Kräfte im Relativsystem:

$$\begin{aligned}\vec{F}^* = \underline{\underline{Q}}\, m\, \dot{\vec{v}}_{OR} \quad &+ \quad m\left(\dot{\vec{w}}^* \times \vec{r}^*_{RS}\right)\\ &+ \quad m\left(\vec{w}^* \times (\vec{w}^* \times \vec{r}^*_{RS})\right)\\ &+ \quad m\left(2\,\vec{w}^* \times \left(\vec{r}^*_{RS}\right)^{\bullet}\right)\\ &+ \quad m\left(\vec{r}^*_{RS}\right)^{\bullet\bullet}. \end{aligned} \tag{I.26}$$

NEWTON's Second Law in Translation with respect to the centre of gravity calculates forces in the absolute coordinate system:

Schwerpunktsatz für Kräfte im Inertialsystem:

$$\begin{aligned}\vec{F} = \underline{\underline{Q}}^*\, \vec{F}^* = m\, \vec{v}^*_{OR} \quad &+ \quad m\,\underline{\underline{Q}}^*\left(\dot{\vec{w}}^* \times \vec{r}^*_{RS}\right)\\ &+ \quad m\,\underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{w}^* \times (\vec{w}^* \times \vec{r}^*_{RS})\right)\\ &+ \quad m\,\underline{\underline{Q}}^*\left(2\,\vec{w}^* \times \left(\vec{r}^*_{RS}\right)^{\bullet}\right)\\ &+ \quad m\,\underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{r}^*_{RS}\right)^{\bullet\bullet}. \end{aligned} \tag{I.27}$$

NEWTON's Second Law in Rotation calculates Moments in the relative coordinate system with respect to the centre of gravity:

Impulsmomentensatz für Momente im Relativsystem, bezogen auf den Schwerpunkt:

$$\vec{M}^*_S = \vec{w}^* \times \left(\underline{\underline{J}}^*_S\, \vec{w}^*\right) + \underline{\underline{J}}^*_S\, \dot{\vec{w}}^*. \tag{I.28}$$

NEWTON's Second Law in Rotation calculates Moments in the absolute coordinate system with respect to the centre of gravity:

Impulsmomentensatz für Momente im Inertialsystem, bezogen auf den Schwerpunkt:

$$\vec{M}_S = \underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{w}^* \times \left(\underline{\underline{J}}^*_S\, \vec{w}^*\right) + \underline{\underline{J}}^*_S\, \dot{\vec{w}}^*\right). \tag{I.29}$$

2 Introduction to Rotor Dynamics

Let us consider a rotation-symmetric rigid body, which rotates around its symmetry axis with the angular frequency Ω. The symmetry axis is concurrent with the body fixed axis z^* ($\vec{e}_3^{\,*}$) of the relative coordinate system and represents the centreline of an arbitrary isotropic elastic bearing

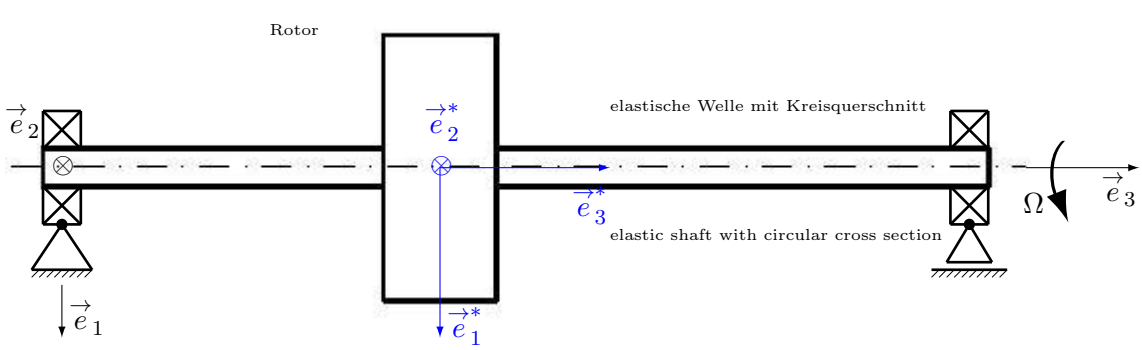
Some examples:

Einführung in die Rotordynamik

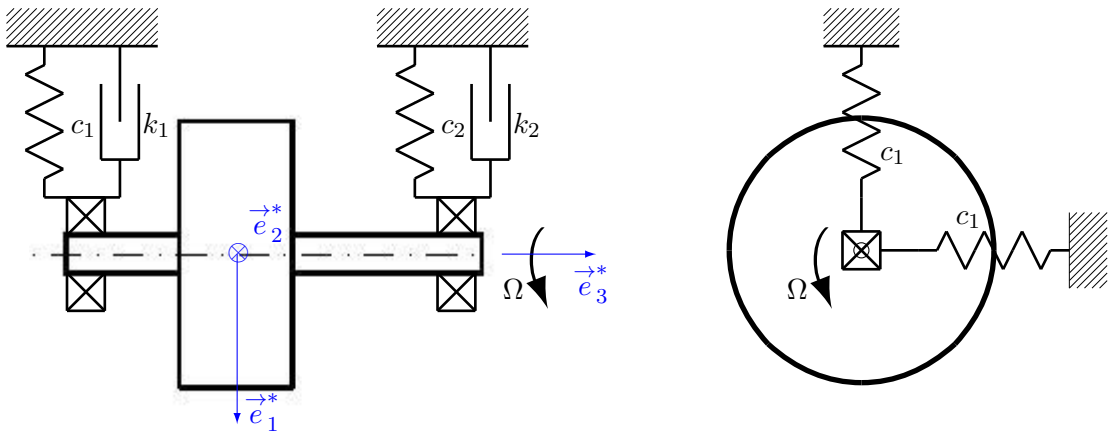
Betrachtet sei ein starrer, rotationssymmetrischer Körper, der sich um seine Symmetrieachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω dreht. Diese körperfeste z^*-Achse des Relativsystems($\vec{e}_3^{\,*}$) stellt die Mittellinie einer beliebigen isotropen, elastischen Auflagerung dar.

Beispiele:

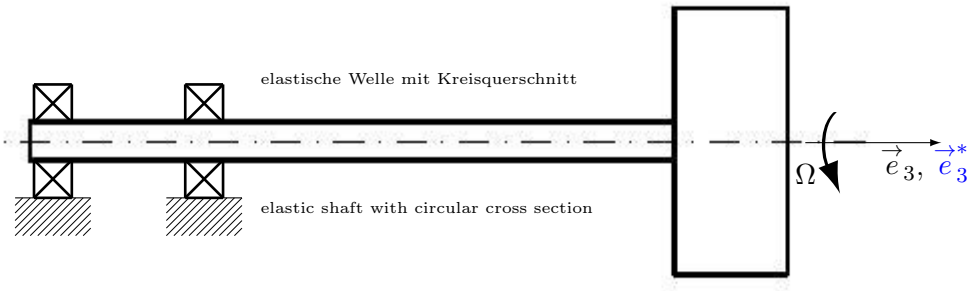
1.)



2.)



3.)



We are looking for the oscillatory motions as a function of time of such a rotor under the influence of adjoined unbalances or other external excitations.

Gesucht ist der zeitliche Verlauf der Schwingungsbewegungen dieser Rotoren unter dem Einfluss von Unwuchtwirkungen oder sonstigen äußeren Anregungen.

2.1 Derivation of the Equations of Motion

Herleitung der Bewegungsgleichungen

We are expecting these movements:

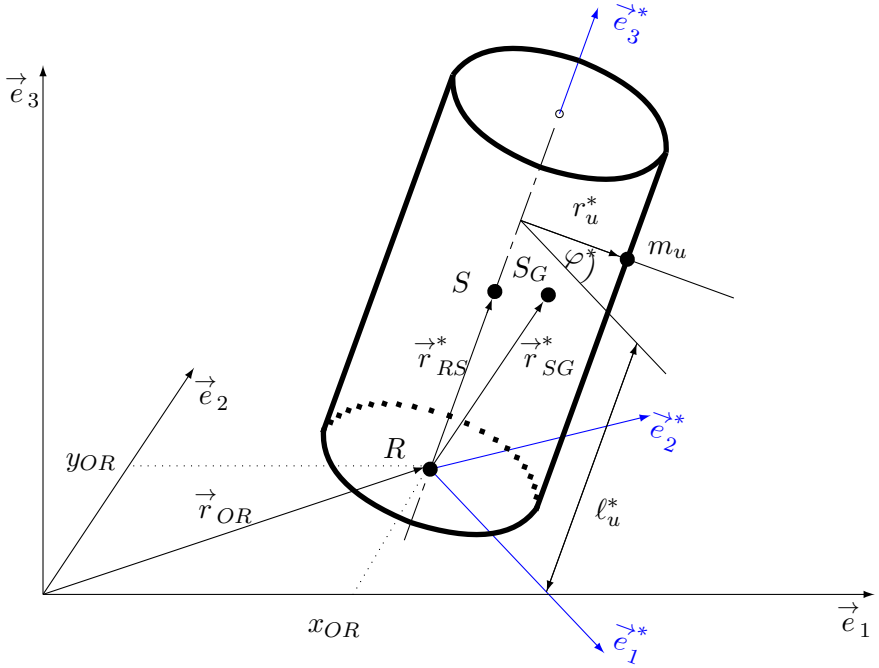
- Translation in a plane which is parallel to the plane spanned by x and y,
- angular motions around the axes x and y,
- rotation around the axis z, we do not expect a translation in z direction however.

These motions are described by the vector $\vec{r}_{OR}(t)$ on the one hand and the cardanic angles α and β on the other hand.

Folgende Bewegungen werden erwartet:

- Translation in einer Ebene, parallel zur x, y - Ebene,
- Verdrehung um die Achsen x und y,
- Rotation um die z - Achse, nicht erwartet wird hingegen eine Translation in z - Richtung.

Beschrieben werden diese Bewegungen durch den Vektor $\vec{r}_{OR}(t)$ und die Kardanischen Winkel α und β.



The quantity $\vec{r}_{OR}$ denotes the translation

Die Translationsbewegung wird beschrieben durch

$$\vec{r}_{OR} = \begin{pmatrix} x_{OR}(t) \\ y_{OR}(t) \\ z_{OR} = const \end{pmatrix} \quad \text{and / und} \quad \vec{r}^{\,*}_{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_S^* \end{pmatrix}.$$

The position of the balanced rotor's centre of gravity S is denoted by vector $\vec{r}^{\,*}_{RS}$ in terms of the relative coordinate system $\mathcal{K}_R^*$.

Der Vektor $\vec{r}^{\,*}_{RS}$ bezeichnet die Lage des Schwerpunktes S beim wuchtigen Rotor bezüglich des Relativsystems $\mathcal{K}_R^*$.

If there is any static unbalance — the common centre of gravity S_G is no longer located on the symmetry axis — vector $\vec{r}^{\,*}_{SG}$ describes the position of the common centre of gravity

Hat der Rotor eine statische Unwucht — liegt also der Gesamtschwerpunkt S_G nicht mehr auf der Drehachse — wird die Schwerpunktlage durch den Vektor $\vec{r}^{\,*}_{SG}$ definiert:

$$\vec{r}^{\,*}_{SG} = \begin{pmatrix} x_{SG}^* \\ y_{SG}^* \\ z_{SG}^* \end{pmatrix}.$$

Let us affix a single unbalance of mass m_u in the distance ℓ_u^* from the origin R and in the distance r_u^* from the z^*-axis. The angle φ^* describes the position in relation to the x^*-axis. We derive approximately

Für den Fall einer einzelnen Unwuchtmasse m_u mit Abstand ℓ_u^* vom Ursprung R, Abstand r_u^* von der z^*-Achse und dem Winkel φ^* von der x^* - Achse, gilt vereinfacht:

$$x_{SG}^* = \frac{m_u}{m} r_u^* \cos\varphi^*$$

$$
\begin{aligned}
y^*_{SG} &= \frac{m_u}{m}\, r^*_u \sin\varphi^* \\
z^*_{SG} &= z^*_s + \frac{m_u}{m}\, \ell^*_u \qquad \text{where /mit} \qquad \left(\frac{m_u}{m} \ll 1\right).
\end{aligned}
$$

In case of having several discrete static unbalances m_{ui} with their appropriate quantities φ^*_i, r^*_{ui} and ℓ^*_{ui} we have

Für den Fall mehrerer Unwuchtmassen m_{ui} mit den zugehörigen Größen φ^*_i, r^*_{ui} und ℓ^*_{ui} gilt:

$$
\vec{r}^{\,*}_{SG} = \begin{pmatrix} \sum\limits_i \frac{m_{ui}}{m}\, r^*_{ui} \cos\varphi^*_i \\[2ex] \sum\limits_i \frac{m_{ui}}{m}\, r^*_{ui} \sin\varphi^*_i \\[2ex] z^*_S + \sum\limits_i \frac{m_{ui}}{m}\, \ell^*_{ui} \end{pmatrix}.
$$

If we have an additional moment unbalance — the axis of rotation is not parallel to the principal axis of inertia — the matrix of inertia with respect to the common centre of gravity S_G is

Hat der Rotor zusätzlich noch eine Momentenunwucht — ist also die Drehachse des Rotors nicht parallel zur Hauptträgheitsache — so ergibt sich die Trägheitsmatrix bezogen auf den Schwerpunkt S_G zu:

$$
\underline{\underline{J}}^*_{SG} = \begin{pmatrix} J^*_{11} & J^*_{12} & J^*_{13} \\[2ex] J^*_{21} & J^*_{22} & J^*_{23} \\[2ex] J^*_{31} & J^*_{32} & J^*_{33} \end{pmatrix}.
$$

It is

Mit:

$$
\begin{aligned}
J^*_{11} &= J_{xS} + m_u \left(r^{*2}_u \sin^2\varphi^* + (\ell^*_u - z^*_S)^2 \right) \approx J_A, \\
J^*_{22} &= J_{yS} + m_u \left(r^{*2}_u \cos^2\varphi^* + (\ell^*_u - z^*_S)^2 \right) \approx J_A, \\
J^*_{33} &= J_{zS} + m_u\, r^{*2}_u \approx J_P, \\[2ex]
J^*_{12} &= J^*_{21} = -m_u\, r^{*2}_u \sin\varphi^* \cos\varphi^*, \\
J^*_{13} &= J^*_{31} = -m_u\, r^*_u\, (\ell^*_u - z^*_S) \cos\varphi^*, \\
J^*_{23} &= J^*_{32} = -m_u\, r^*_u\, (\ell^*_u - z^*_S) \sin\varphi^*.
\end{aligned}
$$

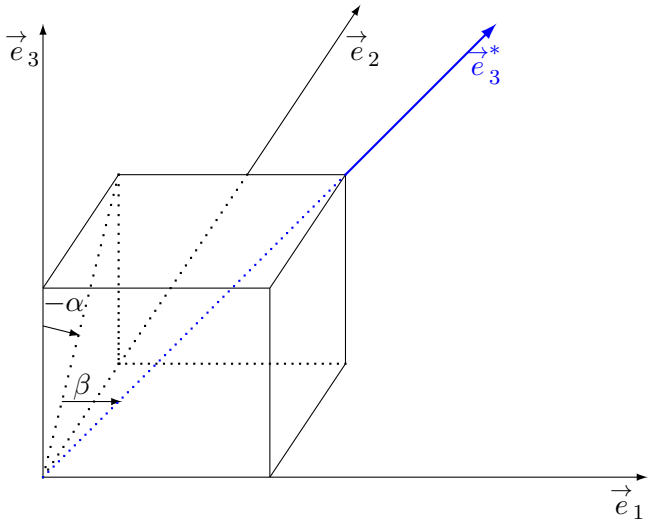
Having more than one unbalance m_{ui} on the positions r^*_{ui}, ℓ^*_{ui} and φ^*_i we need to superpose their effects. Again we have to keep in mind that

Liegen mehrere Unwuchtmassen m_{ui} an den Stellen r^*_{ui}, ℓ^*_{ui} und φ^*_i, so sind deren Wirkungen zu überlagern. Insgesamt muss allerdings gelten

$$
\frac{1}{m} \sum_i m_{ui} \ll 1.
$$

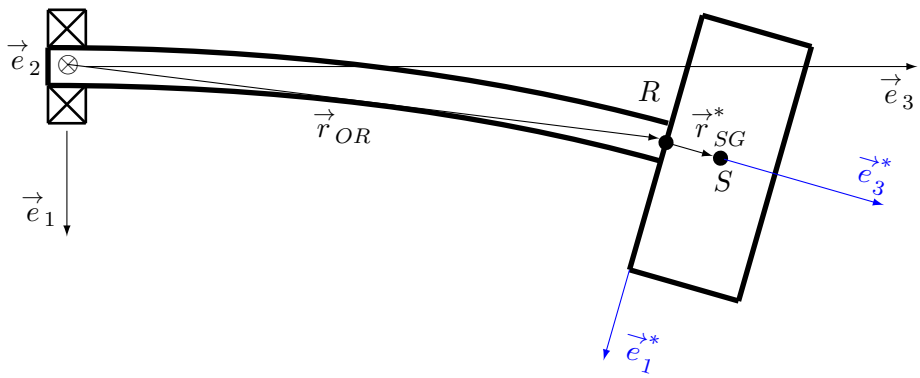
The angular motion of the rotor can be described by the angles α and β

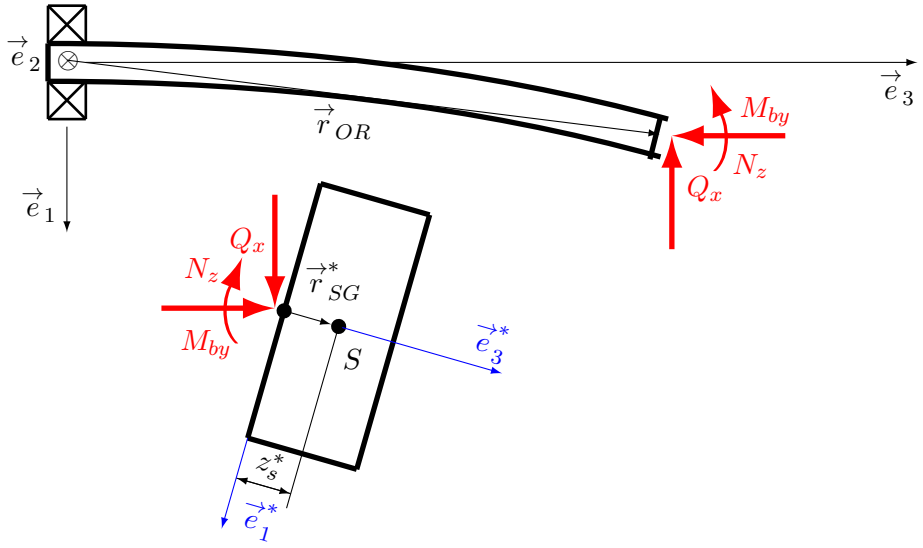
Die Verdrehung des Rotors wird hier beschrieben durch die Kardanischen Winkel α und β



In the next step on our way to the equations of motion we need to cut free the rotor from its elastic and possibly damping suspension. In the cutting areas we have to apply cutting forces and moments.

Im nächsten Schritt auf dem Weg zu den Bewegungsgleichungen muss der Rotor von seiner elastischen und ggf. dämpfenden Auflagerung freigeschnitten werden. An den Schnittflächen sind Schnittkräfte und -momente anzubringen.





In general we find spring forces and damping forces acting on the common centre of gravity S_G

Es wirken also im Allgemeinen auf den Schwerpunkt des starren Rotors die aus Feder und Dämpfungskräften bestehenden Schnittkräfte

$$\vec{F}\,(t) = \begin{pmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \\ F_z(t) \end{pmatrix} \overset{\text{hier}}{=} \begin{pmatrix} Q_x(t) \\ Q_y(t) \\ N_z(t) \end{pmatrix} \tag{II.1}$$

and the cutting moments

und die Schnittmomente

$$\vec{M}\,(t) = \begin{pmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \\ M_z(t) \end{pmatrix} \overset{\text{hier}}{=} \begin{pmatrix} M_{bx} + Q_y\, z^*_s \\ M_{by} - Q_x\, z^*_s \\ M_z \end{pmatrix}. \tag{II.2}$$

Here it should be said that all cutting quantities at the shaft act in negative direction. Hence all cutting quantities acting on the rotor are assumed positive.

An dieser Stelle sei bemerkt, dass an der freigeschnittenen, elastischen Welle alle Schnittgrößen in negativer Richtung angetragen werden. Am freigeschnittenen Rotor sind demzufolge alle Schnittgrößen in positiver Richtung notiert.

Now we apply NEWTON's Second Law of Motion in Translation according to eq. (I.19) and in Rotation according to eq. (I.25) on the cut free rotor. As it is a rigid body whose centre of gravity does not move in the relative coordinate system we can assume that $\left(\vec{r}^{\,*}_{SG}\right)^{\bullet} = 0$ and $\left(\vec{r}^{\,*}_{SG}\right)^{\bullet\bullet} = 0$.

Für den freigeschnittenen Rotor werden nun Schwerpunktsatz nach Gleichung (I.19) und Impulsmomentensatz nach Gleichung (I.25) angewandt. Da es sich um einen starren Körper handelt, dessen Schwerpunktlage sich im Relativsystem zeitlich nicht ändert, gilt $\left(\vec{r}^{\,*}_{SG}\right)^{\bullet} = 0$ und $\left(\vec{r}^{\,*}_{SG}\right)^{\bullet\bullet} = 0$.

$$\vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}}_{OR} + m\,\underline{\underline{Q}}^{*}\left(\dot{\vec{w}}^{*} \times \vec{r}^{\,*}_{SG}\right) + m\,\underline{\underline{Q}}^{*}\left(\vec{w}^{*} \times (\vec{w}^{*} \times \vec{r}^{\,*}_{SG})\right), \tag{II.3}$$

$$\vec{M}_{SG} = \underline{\underline{Q}}^{*}\left(\vec{w}^{*} \times \left(\underline{\underline{J}}^{*}_{SG}\,\vec{w}^{*}\right) + \underline{\underline{J}}^{*}_{SG}\,\dot{\vec{w}}^{*}\right). \tag{II.4}$$

We have as well

Dabei gilt auch:

$$\vec{M}_{SG} = \underline{\underline{Q}}^{*}\left(\sum_{i} \vec{M}^{*}_{SGi} + \vec{r}^{\,*}_{SGi} \times \vec{F}^{*}_{i}\right) \tag{II.5}$$

saying

mit den Vereinbarungen

$\vec{M}^{*}_{SGi}$: external moments in terms of the relative coordinate system $\mathcal{K}^{*}_{R}$ with respect to the moving common centre of gravity,

Äußere Momente, dargestellt im Relativsystem $\mathcal{K}^{*}_{R}$, bezogen auf den bewegten Gesamtschwerpunkt,

$\vec{r}^{\,*}_{SGi}$: position vector in terms of the relative coordinate system $\mathcal{K}^{*}_{R}$ from the common centre of gravity to the point of application of the ith force,

Vektor vom Gesamtschwerpunkt zum Kraftangriffspunkt der $i$ten Kraft im Relativsystem $\mathcal{K}^{*}_{R}$,

$\vec{F}^{*}_{i}$: external forces in terms of the relatice coordinate system $\mathcal{K}^{*}_{R}$.

Äußere Kräfte, dargestellt im Relativsystem $\mathcal{K}^{*}_{R}$.

In the preceding chapter we mentioned a special case where a rigid body rotates around the z or $\vec{e}_3$ axis, the motion is described by the cardanic angle $\gamma = \Omega\,t$. This happens with small angular displacements according to the remaining cardanic angles α and β. We assume this case here. Hence we can use the transformation matrix $\underline{\underline{Q}}$ we derived in eq. (I.2) and the vectorial angular frequency $\vec{w}^{*}$ we derived in eq. (I.13).

Der im vorigen Kapitel angedeutete Spezialfall der Rotation um die z bzw. $\vec{e}_3$ Achse, dargestellt durch den Kardanischen Winkel $\gamma = \Omega\,t$, bei kleinen Auslenkungen in Richtung der verbleibenden kardanischen Winkeln α und β liegt vor. Demzufolge können die in Gleichung (I.2) hergeleitete Transformationsmatrix $\underline{\underline{Q}}$ und der in Gleichung (I.13) hergeleitete Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{w}^{*}$ verwendet werden.

$$\underline{\underline{Q}} \approx \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & \begin{matrix}\alpha\,\sin\Omega t \\ -\beta\,\cos\Omega t\end{matrix} \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & \begin{matrix}\alpha\,\cos\Omega t \\ +\beta\,\sin\Omega t\end{matrix} \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{I.2}$$

and

und

$$\vec{w}^{\,*} \approx \begin{pmatrix} \dot\beta\,\sin\Omega t + \dot\alpha\,\cos\Omega t \\ \dot\beta\,\cos\Omega t - \dot\alpha\,\sin\Omega t \\ \Omega \end{pmatrix}. \tag{I.13}$$

Furthermore we will linearise by neglecting products of two or more of the small displacements and angular displacements x, y, α, β as well as products with their derivatives with respect to time $\dot x$, $\dot y$, $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\ddot x$, $\ddot y$, $\ddot\alpha$, $\ddot\beta$. We further assume that the mass of the unbalance m_u is small in comparison with the mass of the rotor m. Let us recall that we do not expect a displacement in z direction. If we consider the stability of the shafts and bearings we have to regard this motion.

Weiterhin wird vereinfacht, dass beliebige Produkte aus den kleinen Verschiebungen und Verdrehungen x, y, α, β sowie deren Ableitungen $\dot x$, $\dot y$, $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\ddot x$, $\ddot y$, $\ddot\alpha$, $\ddot\beta$ vernachlässigbar seien. Weiterhin wird angenommen, dass die Unwuchtmasse m_u klein gegenüber der Rotormasse m sei. Es sei daran erinnert, dass bei der vorliegenden Betrachtung eine translatorische Rotorbewegung in z - Richtung nicht vorgesehen ist. Insbesondere für Stabilitätsbetrachtungen der Rotorwellen und -lager müsste diese aber Berücksichtigung finden.

Using the mentioned linearisation we find the equations of motion.

Mit den erwähnten Vereinfachungen und Linearisierungen stellen sich die Bewegungsgleichungen wie folgt dar.

NEWTON's Second Law of Motion in Translation:

Schwerpunktsatz:

$$\begin{aligned} F_x &= m\,(\ddot x_{OR} + z_S^*\,\ddot\beta) - m_u\,r_u^*\Omega^2\,\cos(\Omega t + \varphi^*) \\ F_y &= m\,(\ddot y_{OR} - z_S^*\,\ddot\alpha) - m_u\,r_u^*\Omega^2\,\sin(\Omega t + \varphi^*), \end{aligned} \tag{II.6}$$

NEWTON's Second Law of Motion in Rotation:

Impulsmomentensatz:

$$\begin{aligned} M_x &= J_A\,\ddot\alpha + J_P\,\Omega\,\dot\beta + m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2\,\sin(\Omega t + \varphi^*) \\ M_y &= J_A\,\ddot\beta - J_P\,\Omega\,\dot\alpha - m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2\,\cos(\Omega t + \varphi^*). \end{aligned} \tag{II.7}$$

We denote

m : mass of the rotor,

J_A : axial moment of inertia, orthogonal to the axis of rotation in terms of $\mathcal{K}_R^*$,

J_P : polar moment of inertia around the axis of rotation in terms of $\mathcal{K}_R^*$,

m_u : mass of the unbalance,

r_u^* : radial position of the unbalance in terms of $\mathcal{K}_R^*$,

ℓ_u^* : distance from the x^*, y^*-plane to the unbalance in terms of $\mathcal{K}_R^*$,

z_S^* : distance from the origin R of the relative coordinate system $\mathcal{K}_R^*$ to the rotor's centre of gravity in terms of $\mathcal{K}_R^*$,

φ^* : angular position of m_u in relation to the x^* - axis in terms of $\mathcal{K}_R^*$

Dabei bedeuten

Rotormasse,

Axiales Trägheitsmoment, senkrecht zur Drehachse bezogen auf $\mathcal{K}_R^*$,

Polares Trägheitsmoment um die Drehachse bezogen auf $\mathcal{K}_R^*$,

Unwuchtmasse,

Unwuchtradius, angegeben in $\mathcal{K}_R^*$,

Abstand von der x^*, y^* - Ebene zur Unwuchtmasse, angegeben in $\mathcal{K}_R^*$,

Abstand vom Ursprung R des Relativsystems $\mathcal{K}_R^*$ zum Rotorschwerpunkt, angegeben in $\mathcal{K}_R^*$,

Winkellage von m_u gegen die x^* - Achse, angegeben in $\mathcal{K}_R^*$.

2.2 Complex Form of the Equations of Motion

Orthogonal quantities are described by the equations (II.6) and (II.7). It is reasonable to subsume the equations pairwise in complex form. Let

Komplexe Zusammenfassung der Bewegungsgleichungen

Die Gleichungen (II.6) und (II.7) beschreiben jeweils orthogonale Größen, so dass es naheliegt, die Gleichungen paarweise komplex zusammenzufassen. Es gelte:

$$\begin{aligned}
\underline{F} &= F_x + j\,F_y, \\
\underline{M} &= M_x + j\,M_y, \\
\underline{z} &= x_{OR} + j\,y_{OR}, \\
\underline{\Phi} &= \alpha + j\,\beta, \\
\mathrm{e}^{\,j\,(\Omega t + \varphi^*)} &= \cos(\Omega t + \varphi^*) + j\,\sin(\Omega t + \varphi^*).
\end{aligned}$$

With these conventions we find NEWTON's Second Law of Motion in Translation in complex form as

Mit diesen Vereinbarungen lautet der Schwerpunktsatz in komplexer Form

$$m\,\ddot{\underline{z}} - j\,m\,z_S^*\,\ddot{\underline{\Phi}} - \underline{F} = m_u\,r_u^*\,\Omega^2\,\mathrm{e}^{\,j\,(\Omega t+\varphi^*)}. \tag{II.8}$$

Accordingly we find NEWTON's Second Law of Motion in Rotation in complex form as

Entsprechend lautet der Impulsmomentensatz in komplexer Form

$$J_A\,\ddot{\underline{\Phi}} - j\,J_P\,\Omega\,\dot{\underline{\Phi}} - \underline{M} = j\,m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2\,\mathrm{e}^{\,j\,(\Omega t+\varphi^*)}. \tag{II.9}$$

Now we have to associate the quantities $\underline{F}$ and $\underline{M}$ with $\underline{z}$, $\underline{\Phi}$, and $\dot{\underline{z}}$, $\dot{\underline{\Phi}}$ by using HOOKE's Laws[5] and damping laws

Die Größen $\underline{F}$ und $\underline{M}$ sind noch mit Hilfe der jeweiligen Feder- und Dämpfungsgesetze mit $\underline{z}$, $\underline{\Phi}$, und $\dot{\underline{z}}$, $\dot{\underline{\Phi}}$ zu verknüpfen.

2.3 Examples

Beispiele

2.3.1 Jeffcott Rotor

Lavalläufer

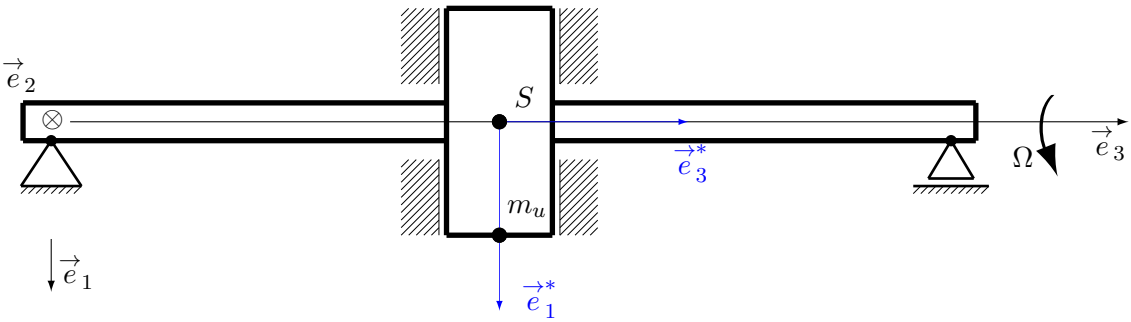
Characteristic of the JEFFCOTT[7] Rotor — on the continent the term "LAVAL[6] Rotor" is more common — is the fact that the rotor is mounted in the middle of the elastic shaft. An angular displacement according to the cardanic angles α and β could be prevented by the centre position of the rotor or by an adequate guidance. Hence $\underline{\Phi} = 0$.

Beim LAVALläufer[6] — im Englischen ist die Bezeichnung JEFFCOTT[7] Rotor üblich — ist der Rotor mittig auf der elastischen Welle befestigt. Eine Neigung des Rotors entsprechend der Kardanischen Winkel α und β ist nicht möglich. Dies wird durch die mittige Rotorposition bzw. durch die Führung sichergestellt. Es gilt also $\underline{\Phi} = 0$.

---

5 Robert HOOKE (* 18 July 1635 on the Isle of Wight; † 3 March 1703 in London); English polymath.
HOOKE was interested in the sciences, particularly biology, from his early childhood.
In 1660, he discovered HOOKE's Law of elasticity, which describes the linear variation of tension with extension in an elastic spring.
In 1665 he published a book entitled *Micrographia* which contained a number of microscopic observations. Hooke coined the biological term cell, so called because his observations of plant cells reminded him of monks' cells which were called "cellula".
HOOKE also achieved fame as Surveyor to the City of London and chief assistant of Christopher Wren, helping to rebuild London after the Great Fire in 1666. He worked on designing the Monument and the Royal Greenwich Observatory (Source: www.en.wikipedia.org, 2007).

Robert HOOKE (* 18. Juli 1635 Isle of Wight; † 3. März 1703 in London); Englischer Universalgelehrter.
HOOKE war seit seiner Kindheit an wissenschaftlichen Untersuchungen, hauptsächlich auf dem Gebiet der Biologie, interessiert.
Im Jahr 1660 entwickkelte er das nach ihm benannte Elastizitätsgesetz, welches den linearen Zusammenhang zwischen Kraft und Verformung, zwischen Spannung und Dehnung an einer Feder beschreibt.
1665 veröffentlichte er sein Werk *Micrographia* welches viele mikroskopoische Untersuchungen beschrieb. Auf HOOKE geht der biologische Begriff der Zelle zurück. Bei seinen Beobachtungen von Pflanzenzellen verglich er sie mit den Zellen von Mönchen, die „cellula“ genannt wurden.
HOOKE wurde auch als technischer Sachverständiger der Stadt London berühmt. Als leitender Mitarbeiter von Christopher Wren war er am Wiederaufbau von London nach dem großen Feuer von 1666 beteiligt. Er entwarf das Monument und die Sternwarte von Greenwich (Quelle: www.en.wikipedia.org, 2007).



[6]
Carl Gustaf Patrik de Laval (*9 May 1845 in Orsa, Dalarna, † 2 February 1913 in Stockholm); Swedish engineer and inventor. De Laval made important contributions to the design of steam turbines and dairy machinery. He enrolled at the Royal Institute of Technology (Kungliga Teknisk högskolan) in Stockholm in 1863, receiving a degree in mechanical engineering in 1866, after which he matriculated at Uppsala University in 1867, completing a doctorate in chemistry in 1872.
In 1887 he built a small steam turbine to demonstrate that such devices could be constructed on a that scale, and in 1890 he developed a nozzle to increase the speed of the steam entering the turbine. This is now known as a de Laval nozzle and is of great importance in rocket design.
De Laval built the first centrifugal milk-cream separator and early milking machines, the first of which he patented in 1894. It was not until after his death, however, that the company he founded marketed the first commercially practical milking machine, in 1918. Together with Oscar Lamm, de Laval founded the company Alfa Laval in 1883 (temporarily called AB Separator) (Source: www.en.wikipedia.org, 2007).

Carl Gustaf Patrik de Laval (*9. Mai 1845 in Orsa, Dalarna, † 2. Februar 1913 in Stockholm); schwedischer Ingenieur und Erfinder. De Laval hat entscheidend zur Entwicklung von Dampfturbinen und von Molkereimaschinen beigetragen. 1863 begann er an der Königlichen Technischen Hochschule (Kungliga Teknisk högskolan) in Stockholm sein Studium, welches er 1866 als Ingenieur beendete. Zwischen 1867 und 1872 promovierte er an der Universität von Uppsala in Chemie.
1887 baute de Laval eine kleine Dampfturbine, um zu zeigen, dass Turbinen auch in einer so kleinen Größe möglich sind. 1890 entwickelte er eine Düse, um die Geschwindigkeit des Dampfes beim Eintritt in die Turbine deutlich zu erhöhen. Das Prinzip der nach ihm benannten Lavaldüse ist auch bei der Auslegung von Raketenmotoren von großer Bedeutung.
De Laval entwickelte die erste Milchzentrifuge, um den Rahm der Milch abzuscheiden. Auch entwickelte er die erste Melkmaschine, die 1894 patentiert wurde. Allerdings konnte erst 1918, also nach seinem Tode, die von ihm gegründete Firma kommerziell nutzbare Melkmaschinen vermarkten. Gemeinsam mit Oscar Lamm gründte de Laval 1883 die Firma Alfa Laval (zeitweise AB Separator) (Quelle: www.en.wikipedia.org, 2007).

[7]
Henry Homan Jeffcott (*1877 Londonderry, Ireland, † 29 June 1937 Walton-on-Thames, Surrey, England); Irish engineer. He completed the job started by de Laval in 1883. He created the idealized Jeffcott model used in U.S. literature to analyze lateral shaft vibration. Jeffcott studied at Trinity College (Dublin University) and began his career as an engineer with Siemens Brothers and Company, Ltd. and W. G. Armstrong, Whitworth & Co. Ltd. in England. In 1910 he returned to Dublin, where he was appointed Professor of Engineering at the Royal College of Science for Ireland. It was here that he published his landmark paper *The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed. – The Effect of Want of Balance* (Source: Orbit (General Electric), September 1997, p 20).

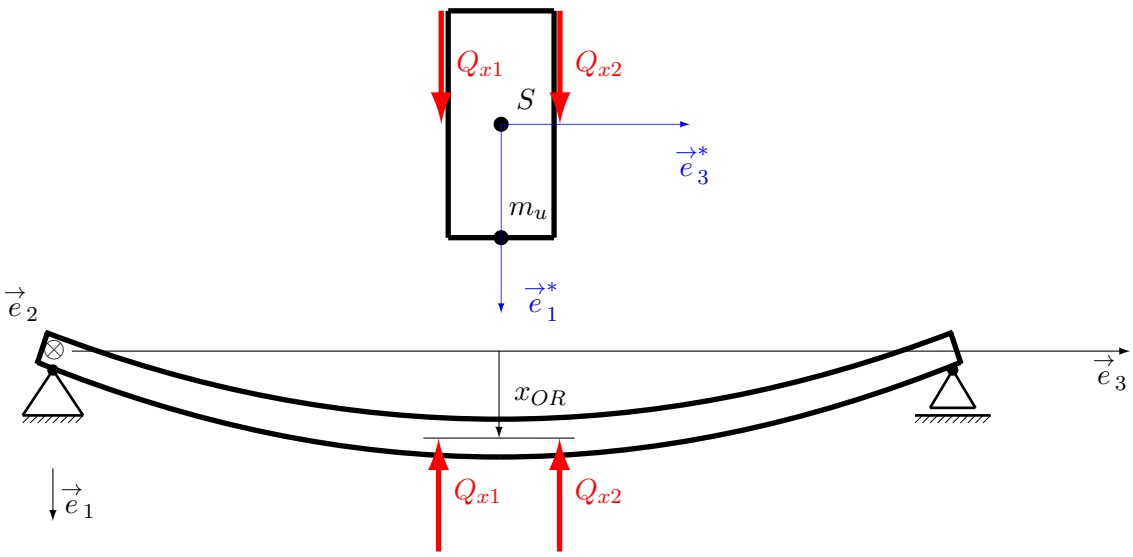
Henry Homan Jeffcott (*1877 Londonderry, Irland, † 29. Juni 1937 Walton-on-Thames, Surrey, England); Irischer Ingenieur. Jeffcott vervollständigte die von de Laval 1883 begonnene Arbeit über Rotordynamik. Er erfand das im amerikanischen Sprachgebrauch nach ihm benannte Rotormodell, um Biegeschwingungen von Wellen zu analysieren. Jeffcott studierte am Trinity College der Universität von Dublin und begann seine Laufbahn als Ingenieur bei den Firmen Siemens Brothers and Company, Ltd. und W. G. Armstrong, Whitworth & Co. Ltd. in England. 1910 kehrte er nach Dublin zurück, wo er an das Royal College of Science for Ireland als Professor berufen wurde. Dort hat er seinen bedeutenden Artikel *The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed. – The Effect of Want of Balance* (Biegeschwingungen von Wellen mit Rotoren in der Nähe von kritischen Drehzahlen. – Die Wirkung von Unwucht) veröffentlichte (Quelle: Orbit (General Electric), September 1997, S. 20).

When we consider this configuration, more quantities are equal to zero: The centre of gravity S coincides with the origin of the relative coordinate system $\mathcal{K}_R^*$, hence $z_S^* = 0$. The unbalance m_u is located in the x^*, y^* - plane, thus we have $\ell_u^* = 0$.

Considering eq. (II.9) we find $\underline{M} = 0$. The free body diagram is then:

Bei dieser Anordnung können weitere Größen zu Null gesetzt werden: Da der Schwerpunkt S im Ursprung des Relativsystems $\mathcal{K}_R^*$ liegt, gilt $z_S^* = 0$. Da die Unwuchtmasse m_u in der x^*, y^* - Ebene liegt, gilt $\ell_u^* = 0$.

Aus Gleichung (II.9) folgt dann $\underline{M} = 0$, folglich liefert das Schnittbild:



Consider: The rotor is displaced in the positive direction x_{OR}, all cutting forces acting on the rotor are plotted in positive direction.

Hence

$$F_x = Q_{x1} + Q_{x2}, \qquad F_y = Q_{y1} + Q_{y2}$$

with

$$\underline{Q}_1 = Q_{x1} + j\,Q_{y1}, \qquad \underline{Q}_2 = Q_{x2} + j\,Q_{y2}$$

we find as well

$$\underline{F} = \underline{Q}_1 + \underline{Q}_2.$$

Beachte: Am Rotor erfolgt eine positive Auslenkung x_{OR}, am Rotor werden Schnittkräfte positiv angetragen.

Also gilt

oder mit

gilt auch

Using the EULER – BERNOULLI beam equation we can find the relation of forces $Q_{x1} + Q_{x2}$ and displacement x_{OR} easily. We reduce this relation to a spring constant c. As we have a rotational symmetric shaft, the spring constant c describes the behavior of the shaft in y direction as well.

Mit den Mitteln der elementaren Balkenbiegung kann der Zusammenhang zwischen den Kräften $Q_{x1}+Q_{x2}$ und der Durchbiegung x_{OR} angegeben werden. Vereinfacht sei eine Federsteifigkeit c angegeben, die diesen Zusammenhang beschreibt. Da die Welle rotationssymmetrisch ist, gilt die gewählte Federsteifigkeit auch für die y - Richtung.

$$\left.\begin{aligned} x_{OR} &= -\tfrac{1}{c}\,(Q_{x1} + Q_{x2}) \\ y_{OR} &= -\tfrac{1}{c}\,(Q_{y1} + Q_{y2}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{oder} \qquad \underline{F} = -c\,\underline{z}$$

Using eq. (II.8) we find

Also folgt aus Gleichung (II.8)

$$m\,\ddot{\underline{z}} + c\,\underline{z} = m_u\,r_u^*\,\Omega^2 \mathrm{e}^{\,j\,(\Omega t + \varphi^*)}, \tag{II.10}$$

which describes the oscillatory motion of a JEFFCOTT rotor under the influence of a static unbalance completely.

womit die Schwingungsbewegung des LAVALläufers unter dem Einfluss einer statischen Unwucht vollständig beschrieben wird.

Discussion of Eq. (II.10)

Diskussion von Gleichung (II.10)

Homogeneous Solution

Homogene Lösung

The homogeneous solution of the differential equation describes the harmonic motion of the system without experiencing any external excitation e.g. caused by an unbalance m_u.

Die homogene Lösung der Differenzialgleichung beschreibt harmonische Bewegungen des nicht von außen, beispielsweise durch die Unwuchtmasse m_u, angeregten Systems.

$$m\,\ddot{\underline{z}} + c\,\underline{z} = 0. \tag{II.11}$$

We choose an harmonic approach

Es wird ein harmonischer Ansatz gewählt

$$\underline{z} = \underline{z}_0\,\mathrm{e}^{\,j\,\omega_e t} \qquad \text{where /mit} \qquad \omega_e^2 = \frac{c}{m}.$$

We find the natural frequency as $f_e = \frac{\omega_e}{2\pi}$. In this very elementary case the natural frequency does not depend on the rotor speed.

In diesem besonders einfachen Fall ist die Eigenfrequenz $f_e = \frac{\omega_e}{2\pi}$ eine drehzahlunabhängige Konstante.

Particular Solution

A particular solution describes the oscillation which is forced by the external excitation. Having an unbalance induced excitation we will find another harmonic motion which is of the same frequency as the rotor speed Ω. We usually choose an approach according to the right hand side.

Partikuläre Lösung

Die partikuläre Lösung beschreibt die durch die äußere Anregung erzwungene Schwingung. In dem vorliegenden Fall der Unwuchterregung ergibt sich eine weitere harmonische Bewegung mit der Frequenz der äußeren Anregung, also der Drehfrequenz bzw. der Drehkreisfrequenz Ω. Der üblicherweise verwendete Ansatz nach Art der rechten Seite lautet:

$$\underline{z} = \underline{z}_m \, \mathrm{e}^{j\,\Omega t}. \tag{II.12}$$

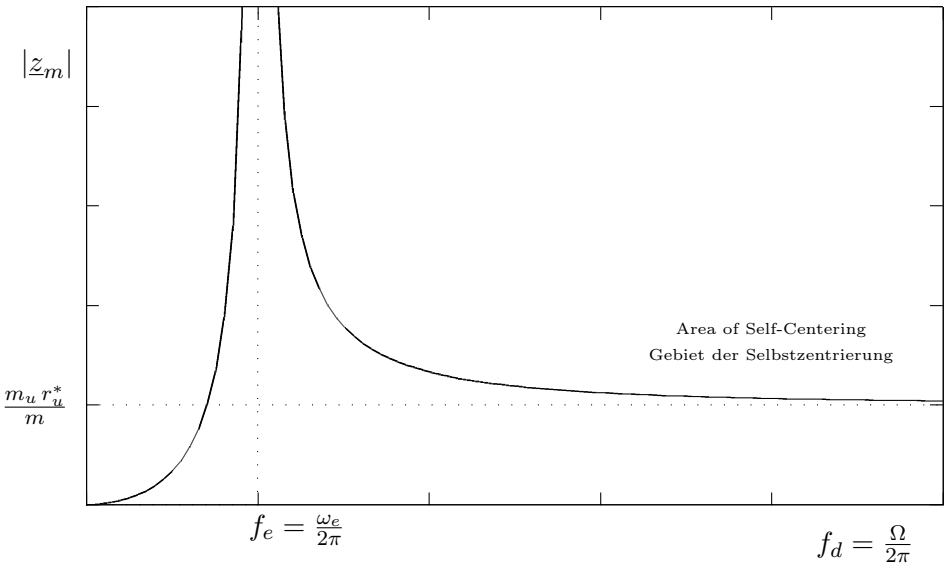
Using the equations (II.12) and (II.10) we have by comparison of the coefficients

Das Einsetzen von Gleichung (II.12) in Gleichung (II.10) ergibt nach Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \underline{z}_m &= \frac{m_u\, r_u^*}{m}\, \frac{\Omega^2}{\frac{c}{m} - \Omega^2} \\ &= \frac{m_u\, r_u^*}{m}\, \frac{\Omega^2}{\omega_e^2 - \Omega^2}. \end{aligned} \tag{II.13}$$

$|\underline{z}_m|$ is the maximal displacement of the rotor axis under the effect of the rotating unbalance.
We consider the developing of $|\underline{z}_m|$ with the rotor speed Ω.

$|\underline{z}_m|$ ist die maximale mechanische Auslenkung der Rotorachse unter Wirkung der umlaufenden Unwucht.
Betrachtet sei der Verlauf von $|\underline{z}_m|$ über der Drehkreisfrequenz Ω



If $f_d = \frac{\omega_e}{2\pi}$, i.e. when $\Omega = \omega_e$, we have resonance or a critical speed where we can have very large displacements. The amplitude of the displacement in resonance depends on how much the system is damped. In our case however we neglected damping forces completely.

Für $f_d = \frac{\omega_e}{2\pi}$, d.h. wenn gilt $\Omega = \omega_e$, liegt die Resonanzfrequenz oder die biegekritische Drehfrequenz vor, bei der sehr große Schwingungsamplituden auftreten können. Die Größe dieser Amplituden ist von der im System vorhandenen Dämpfung abhängig, die in diesem Beispiel vernachlässigt wird.

In cases of $f_d \gg f_e$ – we also say the rotor runs at high supercritical speed – we find the effect of self-centreing. The rotor rotates around the common centre of gravity, which is slightly off the figure axis due to the presence of the unbalance. The nearly motionless common centre of gravity and the circulating figure axis have the distance z_S^*

Wenn aber gilt $f_d \gg f_e$, sich also die sog. hohen überkritischen Drefrequenzen einstellen, entsteht der Effekt der Selbstzentrierung. Hierbei bewegt sich der Rotor um seinen aus Rotormasse und Unwuchtmasse gebildeten Gesamtschwerpunkt. Der nahezu stillstehende Gesamtschwerpunkt und der umlaufende Durchstoßpunkt der Welle haben den Abstand z_S^*.

$$z_S^* = \frac{m_u}{m + m_u} r_u^* \approx \frac{m_u}{m} r_u^* \tag{II.14}$$

Interestingly, the stiffnes of the shaft c and the here neglected damping have nearly no influence when the rotor runs at high supercritical speeds.

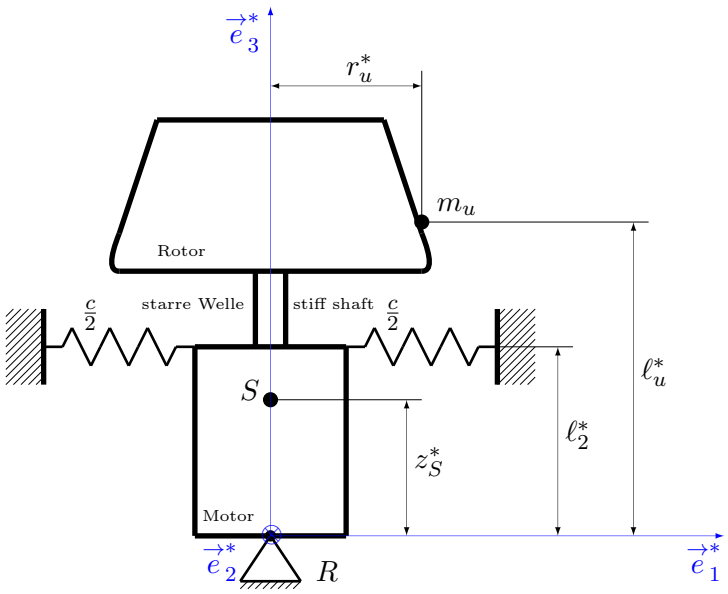
Interessanterweise spielen bei hohen überkritischen Drehzahlen die Wellensteifigkeit c aber auch die hier nicht betrachtete Dämpfung offensichtlich keine entscheidende Rolle mehr.

2.3.2 Centrifuges

Zentrifugen

We consider an extremely simplified model of a centrifuge.

Betrachtet sei ein besonders einfaches Modell einer Laborzentrifuge.



We have

m : total mass of rotor and motor,

J_A : axial moment of inertia of rotor and motor with respect to point R,

J_P : polar moment of inertia of rotor and rotating parts of the motor with respect to axis z^*.

Es sei

Gesamtmasse von Rotor und Motor,

Axiales Trägheitsmoment von Rotor und Motor um R,

Polares Trägheitsmoment von Rotor und Anker des Motors um die Achse z^*.

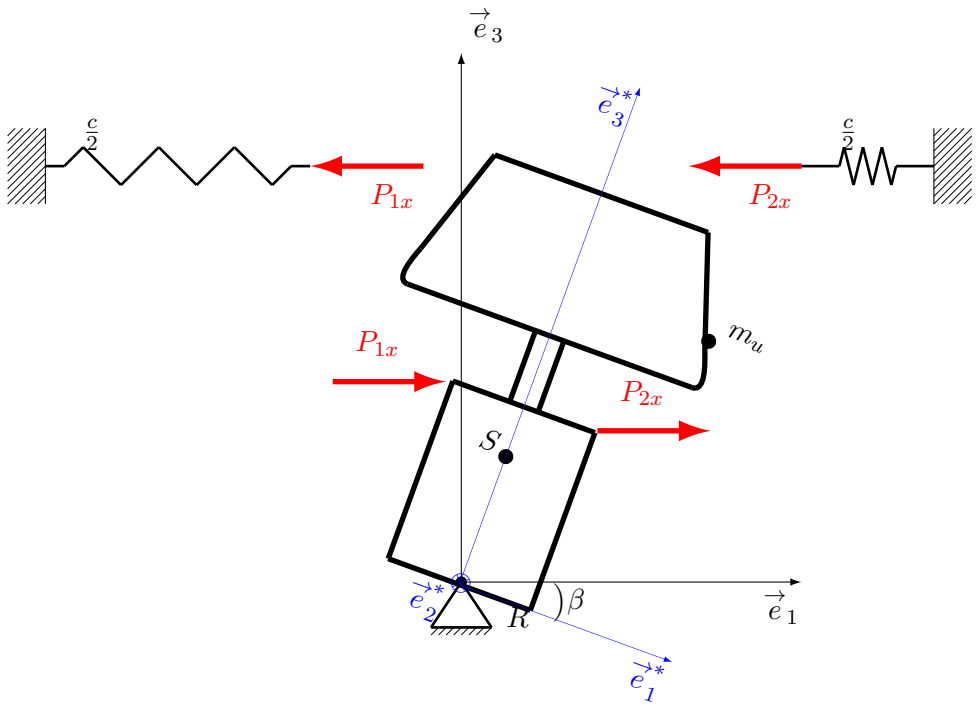
In this case we have to establish NEWTON's Second Law of Motion in Rotation according to eq. (II.7) and (II.9) with respect to the fixed point R, which is a pivot. By considering point R as fixed we have

In diesem Fall ist der Impulsmomentensatz nach Gleichung (II.7) bzw. (II.9) bezüglich des festen Fußdrehpunktes R aufzustellen. Wegen dieses festen Punktes folgt

$$x_{OR} = 0, \qquad y_{OR} = 0 \qquad \text{hence / und deshalb} \qquad \underline{z} = 0.$$

When a positve angular displacement occurs, we cut the centrifuge free. We consider a positive angular displacement according to the cardanic angle β.

Im Moment einer positiven Auslenkung wird die Zentrifuge freigeschnitten. Betrachtet sei hier eine Auslenkung um den Kardanischen Winkel β.



The moments with respect to the pivot are

Die Momente bezüglich des Lagerungspunktes lauten dann

$$M_{yO} \approx (P_{1x} + P_{2x})\,\ell_2^* \qquad \text{where /mit} \qquad P_{1x} = P_{2x} = -\frac{c}{2}\,\ell_2^*\,\beta.$$

Accordingly we find in the orthogonal plane

Analog gilt in einer senkrecht stehenden Ebene

$$M_{xO} \approx -(P_{1y} + P_{2y})\,\ell_2^* \qquad \text{mit} \qquad P_{1y} = P_{2y} = \frac{c}{2}\,\ell_2^*\,\alpha.$$

Hence

Also gilt

$$M_{xO} \approx -c\,\ell_2^{*2}\,\alpha \qquad \text{und} \qquad M_{yO} \approx -c\,\ell_2^{*2}\,\beta \qquad \text{oder} \qquad \underline{M}_O \approx -c\,\ell_2^{*2}\,\underline{\Phi}$$

We presume that the unbalance m_u is located on the x^* axis, which leads to $\varphi^* = 0$. NEWTON's Second Law of Motion in Rotation as seen in in eq. (II.9) yields

Es sei angenommen, dass die Unwuchtmasse m_u auf der x^* Achse liege, so dass $\varphi^* = 0$ gelte. Der Impulsmomentensatz aus Gleichung (II.9) liefert dann

$$J_A\,\ddot{\underline{\Phi}} - j\,J_P\,\Omega\,\dot{\underline{\Phi}} + c\,\ell_2^{*2}\,\underline{\Phi} = j\,m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2\,\mathrm{e}^{j\,\Omega t}. \tag{II.15}$$

This system can perform natural oscillations. The describing differential equation is

Dieses System kann Eigenschwingungen vollführen. Die zugehörige homogene Differenzialgleichung lautet

$$J_A\,\ddot{\underline{\Phi}} - j\,J_P\,\Omega\,\dot{\underline{\Phi}} + c\,\ell_2^{*2}\,\underline{\Phi} = 0. \tag{II.16}$$

Again we choose an harmonic approach

Hierfür werde wieder ein harmonischer Ansatz gewählt

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0\,\mathrm{e}^{j\,\omega_e t}; \qquad \dot{\underline{\Phi}} = j\,\omega_e\,\underline{\Phi}_0\,\mathrm{e}^{j\,\omega_e t}; \qquad \ddot{\underline{\Phi}} = -\omega_e^2\,\underline{\Phi}_0\,\mathrm{e}^{j\,\omega_e t}. \tag{II.17}$$

Applying eq. (II.17) to eq. (II.16) we have

Ein Einsetzen von Gleichung (II.17) in Gleichung (II.16) liefert

$$-\omega_e^2\,J_A + \omega_e\,J_P\,\Omega + c\,\ell_2^{*2} = 0.$$

or

bzw.

$$\omega_e^2 - \omega_e\,\frac{J_P}{J_A}\,\Omega - \frac{c\,\ell_2^{*2}}{J_A} = 0. \tag{II.18}$$

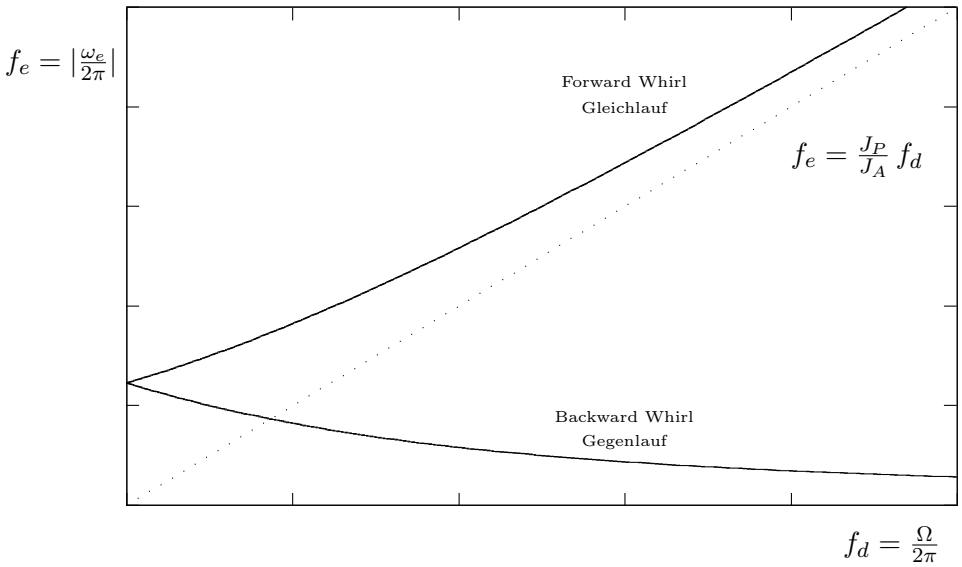
Hence

Es folgt

$$\omega_e = \frac{J_P}{2\,J_A}\,\Omega \pm \sqrt{\frac{J_P^2}{4\,J_A^2}\,\Omega^2 + \frac{c\,\ell_2^{*2}}{J_A}} \tag{II.19}$$

Having such a case where a spinning rotor ($\Omega \neq 0$) inclines against the x, y - plane, we find two natural frequencies with different absolute values. The graph of the higher natural frequency is called forward whirl, the lower one backward whirl. These names have been chosen because if the system oscillated only with the higher natural frequency — certain initial conditions can induce this — we would find the centre of the rotor orbiting in the direction of rotation. Oscillations with only the lower natural frequency lead to a slower orbiting motion against the direction of rotation.
These two natural frequencies depend on the rotary frequency $f_d = \frac{\Omega}{2\pi}$. The forward whirl approaches the function $f_e = \frac{J_P}{J_A} f_d$ asymptotically, the backward whirl approaches zero.

In einem solchen Fall, in dem sich der Rotor bezüglich der x, y - Ebene neigt und dabei gleichzeitig gilt $\Omega \neq 0$, ergeben sich zwei betragsmäßig verschiedene Eigenfrequenzen. Der Verlauf der höheren Eigenfrequenz wird Gleichlauf, der Verlauf der kleineren Eigenfrequenz wird Gegenlauf genannt. Die Bezeichnungen rühren daher, dass ein Rotor, der nur mit der höheren Eigenfrequenz schwingt — besondere Anfangsbedingungen könnten dies ermöglichen — eine Orbitalbewegung ausführt, die in Drehrichtung erfolgt. Schwingungen nur mit der unteren Eigenfrequenz verursachen langsamere Orbitalbewegungen entgegen der Drehrichtung.
Beide Eigenfrequenzen sind von der Drehfrequenz $f_d = \frac{\Omega}{2\pi}$ abhängig. Der Gleichlauf nähert sich der Funktion $f_e = \frac{J_P}{J_A} f_d$ asymptotisch an, der Gegenlauf dem Wert Null.



Let us now presume oscillations that are excited externally. We consider an external excitation by means of the unbalance m_u, which revolves with $f_d = \frac{\Omega}{2\pi}$.
We have to find an approach, similar to the right hand side, for the inhomogeneus system described in eq. (II.15)

Nun seien Schwingungen mit äußerer Anregung betrachtet. Im vorliegenden Fall erfolgt die Anregung durch die Unwuchtmasse m_u, die mit $f_d = \frac{\Omega}{2\pi}$ umläuft.
Für das inhomogene System nach Gleichung (II.15) wird wieder ein Ansatz nach Art der rechten Seite gesucht:

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0 \, \mathrm{e}^{j\,\Omega t}.$$

Using this approach on eq. (II.15) we find

Das Einsetzen in Gleichung (II.15) ergibt

$$\left(-\Omega^2 J_A + \Omega^2 J_P + c\,\ell_2^{*2}\right) \underline{\Phi}_0 = j\, m_u\, r_u^* \left(\ell_u^* - z_S^*\right) \Omega^2$$

or

oder

$$\underline{\Phi}_0 = j\,\frac{m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2}{(J_P - J_A)\,\Omega^2 + c\,\ell_2^{*2}} \tag{II.20}$$

and hence und somit

$$\underline{\Phi} = j\,\frac{m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2}{(J_P - J_A)\,\Omega^2 + c\,\ell_2^{*2}}\,\mathrm{e}^{\,j\,\Omega t}. \tag{II.21}$$

Discussion of Eq. (II.21)

If the denominator of eq. (II.21) gets equal to zero, the amplitudes of the oscillation get arbitraryly large. We have a case of resonance.

Now we have to check whether or not resonance occurs at forward-whirl natural frequencies as well as at backward-whirl resonance frequencies. If we excite the system with the same frequency as the forward-whirl natural frequency we have $\omega_e = \Omega$. If we apply this relation to the characteristic polynomal (II.18), we find indeed

Diskussion von Gleichung (II.21)

Wenn in Gleichung (II.21) der Nenner zu Null wird, werden die Schwingungsamplituden beliebig groß, es liegt Resonanz vor.

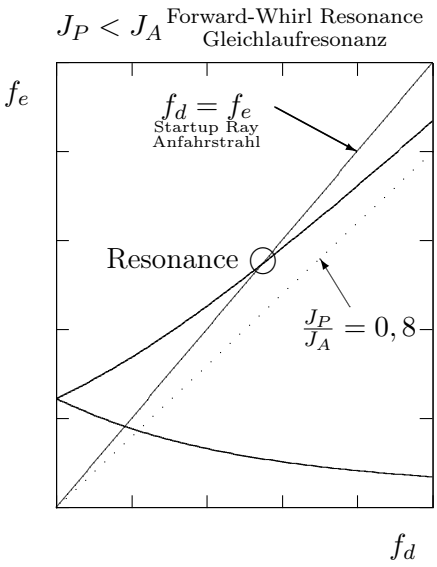
Es soll nun überprüft werden, ob sowohl bei Gleich- als auch bei Gegenlauf Eigenfrequenzen Resonanz entsteht. Bei Anregung mit der Gleichlaufeigenfrequenz gilt $\omega_e = \Omega$. Diese Bedingung eingesetz in das charakteristische Polynom (II.18) führt tatsächlich zu dem Ergebnis

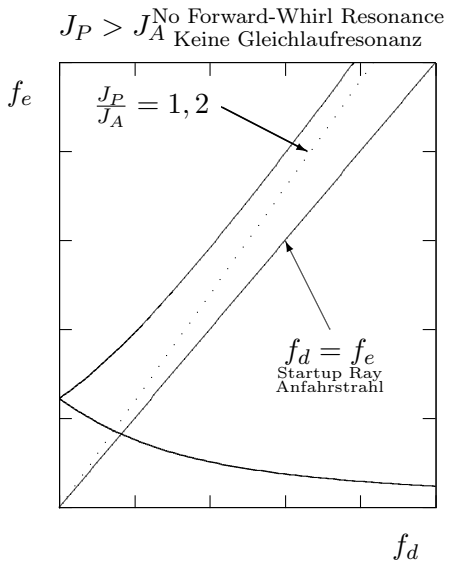
$$(J_P - J_A)\,\Omega^2 + c\,\ell_2^{*2} = 0.$$

Such a forward-whirl resonance can only occur if the difference $J_P - J_A$ gets negative. Only long and tall rotors sustain forward-whirl resonances. Discoidal rotors — J_P is nearly twice as large as J_A — are not endangered by forward-whirl resonances.

It is easy to decide whether or not a forward-whirl resonance occurs: it occurs only if the startup ray $f_d = f_e$ intersects the forward whirl.

Eine solche Gleichlaufresonanz tritt nur dann auf, wenn die Differenz $J_P - J_A$ negativ wird. Lediglich bei langen, schlanke Rotoren besteht die Gefahr einer Gleichlaufresonanz. Scheibenförmige Rotoren, bei denen J_P etwa doppelt so groß ist, wie J_A sind nicht durch Gleichlaufresonanzen gefährdet.
Das Auftreten von Gleichlaufresonanzen kann leicht daran erkannt werden, dass sich Gleichlauf und Anfahrstrahl $f_d = f_e$ schneiden.





In case of the rotational frequency being equal to the backward-whirl natural frequency which means we use $-\omega_e = \Omega$ in eq. (II.18) we find

Wenn jedoch die Drehfrequenz mit der Gegenlaufeigenfrequenz übereinstimmt, d.h. in Gleichung (II.18) wird $-\omega_e = \Omega$ eingesetzt, gilt

$$-(J_P + J_A)\,\Omega^2 + c\,\ell_2^{*2} = 0.$$

The denominator of eq. (II.21) obviously cannot become equal to zero. Hence there is no unbalance excited backward-whirl resonance in this case.

Consider: We cannot excite the backward-whirl only by means of unbalance on isotropic systems, however it can be excited by impact, noise signals etc.

Der Nenner von Gleichung (II.21) kann erkennbar nicht Null werden, folglich gibt es keine unwuchterregte Gegenlaufresonanz in diesem Fall.

Merke: Bei Isotropen Systemen ist der Gegenlauf allein durch Unwucht nicht anzuregen, wohl aber durch Stoß, Rauschen etc.

Remark on the Experimental Identification of Natural Frequencies

To identify all natural frequencies we have to externally excite the system by adequate means. Furthermore we have to do this at all rotational frequencies $f_d = \frac{\Omega}{2\pi}$. Adequate means can be noise signals, sinusodial sweep signals or impacts.

Anmerkungen zur experimentellen Ermittlung von Eigenfrequenzen

Zur Messung aller Eigenfrequenzen muss das betrachtete Rotorsystem bei allen Drehfrequenzen $f_d = \frac{\Omega}{2\pi}$ von außen in geeigneter Weise angeregt werden. Als geeignete Anregung können wie bei allen linearen schwingungsfähigen Systemen Rauschsignale, Gleitsinus (Sweep) und Impulssignale benutzt werden.

Let us keep considering the known centrifuge. We excite the system by impact near the point of application of one spring. This leads to an arbitrary moment as a function of time $\underline{M}(t)$.

Es sei weiterhin die behandelte Zentrifuge betrachtet, die durch Stoßanregung in der Gegend der Federanbringung einer beliebigen Momentenfunktion $\underline{M}(t)$ unterworfen wird.

$$J_A\,\ddot{\underline{\Phi}} - j\,J_P\,\Omega\,\dot{\underline{\Phi}} + c\,\ell_2^{*2}\,\underline{\Phi} = \underline{M}(t). \tag{II.22}$$

This equation gets FOURIER[8] transformed.

Diese Gleichung werde der FOURIER[8] -Transformation unterworfen.

$$\underline{\varphi}(\omega) = \int \underline{\Phi}(t)\,\mathrm{e}^{-j\,\omega t}\,\mathrm{d}\,t = \mathbf{F}\Big\{\underline{\Phi}(t)\Big\}.$$

As the FOURIER operator $\mathbf{F}\Big\{\ldots\Big\}$ is a linear operater and the quantity to be transformed $\underline{\Phi}$ is harmonic, according to the approach, we can very easily derive with respect to time.

Da der FOURIERoperator $\mathbf{F}\Big\{\ldots\Big\}$ ein linearer Operator ist, und die zu transformierende Größe $\underline{\Phi}$ gemäß Ansatz harmonischen Verlauf hat, kann formal einfach differenziert werden.

$$\mathbf{F}\Big\{\dot{\underline{\Phi}}(t)\Big\} = j\,\omega\,\mathbf{F}\Big\{\underline{\Phi}(t)\Big\} \qquad \text{and / und} \qquad \mathbf{F}\Big\{\ddot{\underline{\Phi}}(t)\Big\} = -\omega^2\,\mathbf{F}\Big\{\underline{\Phi}(t)\Big\}. \tag{II.23}$$

We get for eq. (II.22)

Somit wird aus Gleichung (II.22)

$$J_A\,\mathbf{F}\Big\{\ddot{\underline{\Phi}}\Big\} - j\,J_P\,\Omega\,\mathbf{F}\Big\{\dot{\underline{\Phi}}\Big\} + c\,\ell_2^{*2}\,\mathbf{F}\Big\{\underline{\Phi}\Big\} = \mathbf{F}\Big\{\underline{M}(t)\Big\}.$$

---

[8] Jean Baptiste Joseph FOURIER (* 21 March 1768 near Auxerre; † 16 May 1830 in Paris); French mathematician and physicist. In 1822 he published his *Théorie analytique de la chaleur* (Analythic Theory of Heat), in which he states that the flow of heat between two adjacent molecules is proportional to the extremely small difference of their temperatures. In this work he claims that any function of a variable, whether continuous or discontinuous, can be expanded in a series. Though this result is not correct (only correct for periodic functions), Fourier's observation that some discontinuous functions are equal to infinite series was a breakthrough.
FOURIER is also credited with the discovery in his essay in 1827 that gases in the atmosphere might increase the surface temperature of the Earth. He called it *l'effet de serre* (greenhouse effect). He established the concept of planetary energy balance - that planets obtain energy from a number of sources that cause temperature increase. Planets also lose energy by infrared radiation that FOURIER called *chaleur obscure* (dark heat) with the rate increasing with temperature. A balance is reached between heat gain and heat loss (Source: www.en.wikipedia.org, 2007.

Jean Baptiste Joseph FOURIER (* 21. März 1768 bei Auxerre; † 16. Mai 1830 in Paris); französischer Mathematiker und Physiker. 1822 veröffentlichte er sei Werk *Théorie analytique de la chaleur* (Analythische Theorie der Wärme), in welchem er beschreibt, dass die Wärmeübertragung zwischen zwei benachbarten Molekülen proportional zum minimalen Unterschied ihrer Temperaturen ist. In dieser Arbeit stellte er auch fest, dass jede Größe, egal ob stetig oder unstetig mit einer Reihe entwickelt werden kann. Obwohl dieses Ergebnis nicht ganz korrekt ist (es ist nur für periodische Funktionen korrekt), war FOURIERs Beobachtung, dass manche unstetige Funktionen gleich einer unendlichen Reihe sind, ein Durchbruch.
FOURIER veröffentlichte 1827 seine Entdeckung, dass bestimmte Gase in der Atmosphäre die Oberflächentemperatur der Erde erhöhen können. Er nannte dies *l'effet de serre* (Treibhauseffekt). Er begründete die Erkenntnis, dass Planeten sich in einem energetischen Gleichgewicht befinden. Planeten erhalten Energie aus verschiedenen Quellen. Dies führt zu einer Temperaturerhöhung. Planeten geben aber auch Enerie ab, u.a. durch infrarote Strahlung, die FOURUER *chaleur obscure* (dunkle Wärme) nannte und zwar um so mehr, je höher die Temperatur ist. Es stellt sich so ein Gleichgewicht zwischen Energieaufnahme und -abgabe ein (Quelle: www.en.wikipedia.org, 2007).

applying eq. (II.23) yields

Unter Berücksichtigung von Gleichung (II.23) gilt

$$\left(-\omega^2 J_A + \omega\,\Omega\,J_P + c\,\ell_2^{*2}\right)\,\mathbf{F}\left\{\underline{\Phi}\right\} = \mathbf{F}\left\{\underline{M}(t)\right\}.$$

We can write the transferfunction as

Die Bildung der Übertragungsfunktion ergibt dann

$$\frac{\mathbf{F}\left\{\underline{\Phi}\right\}}{\mathbf{F}\left\{\underline{M}(t)\right\}} = \frac{1}{-\omega^2 J_A + \omega\,\Omega\,J_P + c\,\ell_2^{*2}}. \tag{II.24}$$

For certain angular frequencies ω_e the transferfunction has poles when

Für diejenigen Kreisfrequenzen ω_e, für die die Gleichung (II.24) Polstellen besitzt, ist

$$-\omega_e^2 J_A + \omega_e\,\Omega\,J_P + c\,\ell_2^{*2} = 0,$$

which is exactly the same relation as used when we calculate natural frequencies.

was exakt die Beziehung zur Ermittlung der Eigenfrequenzen darstellt.

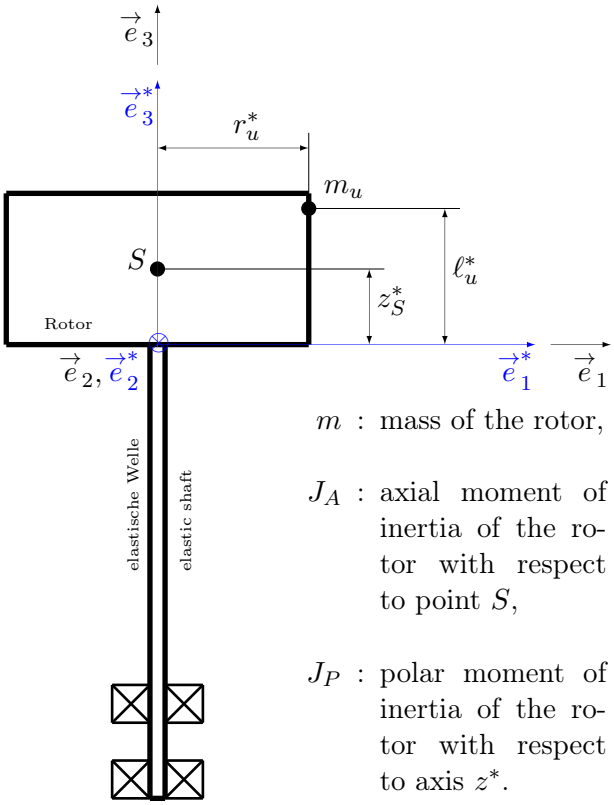
We have to obtain the quantities $\mathbf{F}\left\{\underline{\Phi}\right\}$ and $\mathbf{F}\left\{\underline{M}\right\}$ at a certain but constant rotary frequency $f_d = \frac{\Omega}{2\pi}$ and divide them. A dual channel FOURIER-Analyzer is very convenient for this measurement. The poles, also called peaks, indicate all forward and backward-whirl natural (angular) frequencies for this specific rotary frequency.

Also sind bei fest eingestellter Drehfrequenz $f_d = \frac{\Omega}{2\pi}$ die Größen $\mathbf{F}\left\{\underline{\Phi}\right\}$ und $\mathbf{F}\left\{\underline{M}\right\}$ zu bilden und zu dividieren. Diesen Vorgang kann ein zweikanaliger FOURIER - Analyzer durchführen. Die Polstellen – auch peaks genannt – ergeben dann alle Gleich- und Gegenlaufeigen(kreis)frequenzen für die vorliegende Drehfrequenz.

2.3.3 Motion of a Rigid Rotor Applied to a

Bewegung eines starren Rotors auf einer dünnen,

Lean Elastic Shaft **elastischen Welle**



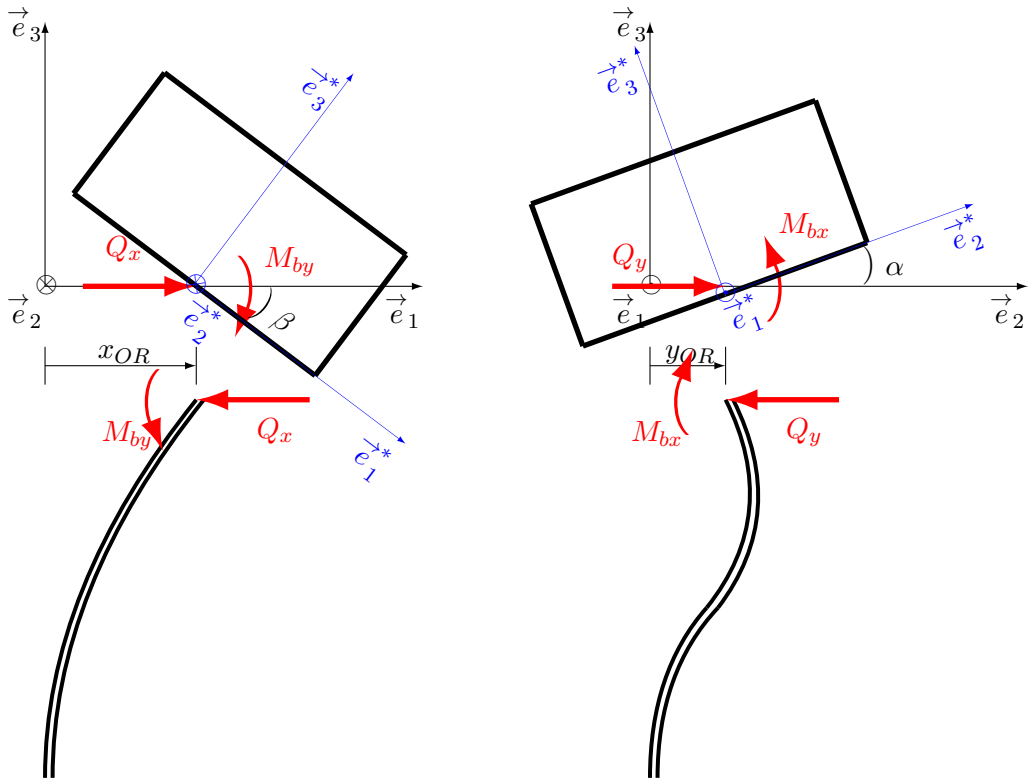
m : mass of the rotor, Rotormasse,

J_A : axial moment of inertia of the rotor with respect to point S, Axiales Trägheitsmoment des Rotors um S,

J_P : polar moment of inertia of the rotor with respect to axis z^*. Polares Trägheitsmoment des Rotors um z^*.

At a moment of a positive displacement according to x_{OR} and y_{OR} and of a positive angular displacement according to α and β we cut the rotor free of its elastic shaft.

Im Moment einer positiven Auslenkung gemäß x_{OR} und y_{OR} sowie einer positiven Verdrehung gemäß α und β erfolgt das Freischneiden des Rotors von seiner elastischen Welle.



To describe the relationship between (angular) displacement and force / moment we define influence coefficients.

Um den Zusammenhang zwischen Auslenkungs- und Kraft- bzw. Momentgrößen anzugeben werden Einflusszahlen festgelegt.

a_{11}	:	force	$\longrightarrow$	displacement
a_{22}	:	moment	$\longrightarrow$	angular displacement
a_{21}	:	force	$\longrightarrow$	angular displacement
a_{12}	:	moment	$\longrightarrow$	displacement
$a_{12} \equiv a_{21}$				

a_{11}	:	Kraft	$\longrightarrow$	Weg
a_{22}	:	Moment	$\longrightarrow$	Winkel
a_{21}	:	Kraft	$\longrightarrow$	Winkel
a_{12}	:	Moment	$\longrightarrow$	Weg
$a_{12} \equiv a_{21}$				

$$\begin{aligned} x_{OR} &= -a_{11}\,Q_x - a_{12}\,M_{by} \\ y_{OR} &= -a_{11}\,Q_y + a_{12}\,M_{bx} \\ \\ \alpha &= a_{21}\,Q_y - a_{22}\,M_{bx} \\ \beta &= -a_{21}\,Q_x - a_{22}\,M_{by} \end{aligned} \tag{II.25}$$

Using complex notation we get

Bei der Benutzung der komplexen Schreibweise folgt:

$$\underline{Q} = Q_x + j\,Q_y, \quad \underline{M}_b = M_{bx} + j\,M_{by}, \quad \underline{z} = x_{OR} + j\,y_{OR}, \quad \underline{\Phi} = \alpha + j\,\beta. \tag{II.26}$$

Using eq. (II.25) yields

Somit ist wegen Gleichung (II.25)

$$\underline{z} = -a_{11}\,\underline{Q} + j\,a_{12}\underline{M}_b, \qquad \underline{\Phi} = -j\,a_{21}\,\underline{Q} - a_{22}\,\underline{M}_b. \tag{II.27}$$

We need to obtain the quantities $\underline{F}$ and $\underline{M}$, the latter with respect to point S:

Die notwendigen Größen $\underline{F}$ und $\underline{M}$, letztere auf den Schwerpunkt S bezogenen, ergeben sich zu

$$\underline{F} = \underline{Q}; \qquad \left.\begin{aligned} M_x &= M_{bx} + Q_y\,z_S^* \\ M_y &= M_{by} - Q_x\,z_S^* \end{aligned}\right\} \qquad \underline{M} = \underline{M}_b - j\,z_S^*\,\underline{Q}. \tag{II.28}$$

We find the equations of motion according to NEWTON's Second Law of Motion in Translation (eq. II.8) and in Rotation (eq. II.9) as

Die Bewegungsgleichungen Schwerpunktsatz nach Gleichung (II.8) und Impulsmomentensatz nach Gleichung (II.9) lauten dann

$$\begin{aligned} m\,\ddot{\underline{z}} - j\,m\,z_S^*\,\ddot{\underline{\Phi}} - \underline{Q} &= m_u\,r_u^*\,\Omega^2\,\mathrm{e}^{\,j(\omega t+\varphi^*)}, \\ J_A\,\ddot{\underline{\Phi}} - j\,J_P\,\Omega\,\dot{\underline{\Phi}} - \underline{M}_b + j\,z_S^*\,\underline{Q} &= j\,m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2\,\mathrm{e}^{\,j(\omega t+\varphi^*)}. \end{aligned} \tag{II.29}$$

Now we have to describe how the values $\underline{Q}$ and $\underline{M}_b$ depend on $\underline{z}$ and $\underline{\Phi}$. Solving eq. (II.27) for $\underline{Q}$ and $\underline{M}_b$ yields

Die Größen $\underline{Q}$ und $\underline{M}_b$ müssen noch in ihrer Abhängigkeit von $\underline{z}$ und $\underline{\Phi}$ angegeben werden. Ein Auflösen von Gleichung (II.27) nach $\underline{Q}$ und $\underline{M}_b$ ergibt

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= -\underbrace{\frac{a_{22}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}}_{c_1}\,\underline{z} - j\,\underbrace{\frac{a_{12}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}}_{c_D}\,\underline{\Phi}, \\ \underline{M}_b &= j\,\underbrace{\frac{a_{12}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}}_{c_D}\,\underline{z} - \underbrace{\frac{a_{11}}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}}_{c_2}\,\underline{\Phi} \end{aligned}$$

or

oder

$$\underline{Q} = -c_1\,\underline{z} - j\,c_D\,\underline{\Phi}, \qquad \underline{M}_b = j\,c_D\,\underline{z} - c_2\,\underline{\Phi}. \tag{II.30}$$

Natural Frequencies

As we are interested in concise results, our considered rotor-system gets more simplified. We assume the rotor as a sufficient thin disc which yields $z_S^* = 0$ and $\ell_u^* = 0$. To find natural frequencies we regard the homogeneous system.

Eigenfrequenzen

Um möglichst einfache Ergebnisse zu erzielen, wird das betrachtete Rotorsystem weiter vereinfacht. Es wird angenommen, dass der Roror aus einer beliebig dünnen Scheibe besteht. In Folge wird $z_S^* = 0$ und $\ell_u^* = 0$. Um das Eigenverhalten zu ermitteln, wird von einem homogenen System ausgegangen.

$$\begin{aligned} m\,\ddot{\underline{z}} + c_1\,\underline{z} + j\,c_D\,\underline{\Phi} &= 0, \\ J_A\,\ddot{\underline{\Phi}} - j\,J_P\,\Omega\,\dot{\underline{\Phi}} + c_2\,\underline{\Phi} - j\,c_D\,\underline{z} &= 0. \end{aligned} \tag{II.31}$$

Again we choose an harmonic approach, where ω_e will lead to the expected natural frequencies.

Erneut wird ein harmonischer Ansatz gewählt mit ω_e als den erwarteten Eigenkreisfrequenzen.

$$\underline{z} = \underline{z}_0\,\mathrm{e}^{j\,\omega_e t}, \qquad \underline{\Phi} = \underline{\Phi}_0\,\mathrm{e}^{j\,\omega_e t}.$$

This yields

Ein Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} -m\,\omega_e^2\,\underline{z}_0 + c_1\,\underline{z}_0 + j\,c_D\,\underline{\Phi}_0 &= 0, \\ -J_A\,\omega_e^2\,\underline{\Phi}_0 + J_P\,\omega_e\,\Omega\,\underline{\Phi}_0 + c_2\,\underline{\Phi}_0 - j\,c_D\,\underline{z}_0 &= 0. \end{aligned} \tag{II.32}$$

We can write eq (II.32) in matrix notation.

Die Gleichung (II.32) kann in Matrizenschreibweise dargestellt werden.

$$\underline{\underline{D}}\;\vec{x} = \vec{0}\;. \tag{II.33}$$

Where

Mit

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} (c_1 - m\,\omega_e^2) & j\,c_D \\ -j\,c_D & (c_2 - J_A\,\omega_e^2 + J_P\,\omega_e\,\Omega) \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} \underline{z}_0 \\ \underline{\Phi}_0 \end{pmatrix}.$$

We can solve eq. (II.33) and hence eq. (II.33) nontrivially if and only if

Die Gleichung (II.33) und damit die Gleichung (II.32) ist d. u. n. d. nichttrivial lösbar, wenn gilt

$$\det\left|\underline{\underline{D}}\right| = 0.$$

The determinant leads to the characteristic polynomal

Diese Determinante führt zum charakteristischen Polynom

$$(c_1 - m\,\omega_e^2)\,(c_2 - J_A\,\omega_e^2 + J_P\,\omega_e\,\Omega) - c_D^2 \stackrel{!}{=} 0. \tag{II.34}$$

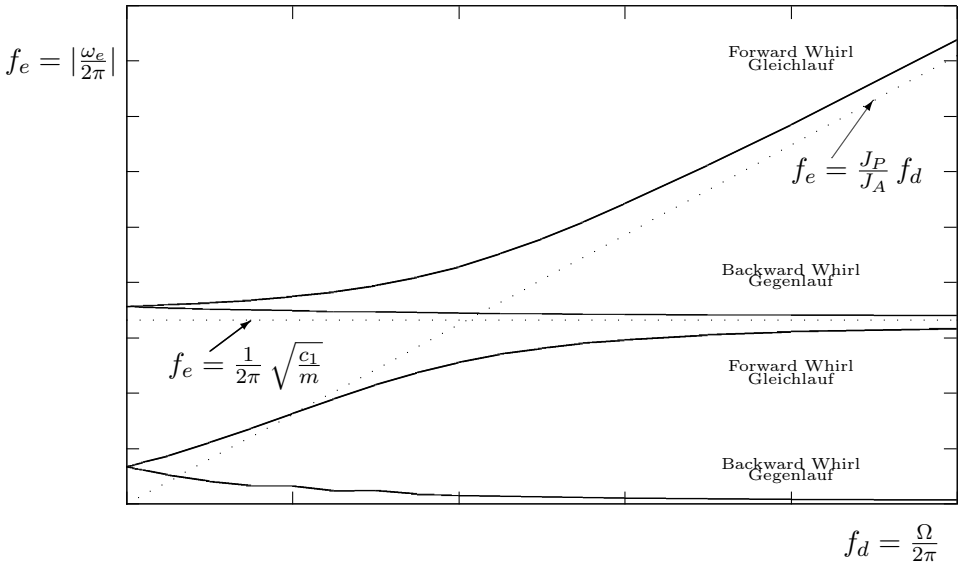
We find an algebraic equation of 4th order, which should be solved numerically.

Ergebnis ist eine algebraische Gleichung von 4. Ordnung, die i.a. nur noch numerisch auswertbar ist:

$$\omega_e^4 - \omega_e^3\,\Omega\,\frac{J_P}{J_A} - \omega_e^2\left(\frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{J_P}\right) + \omega_e\,\Omega\,\frac{J_P}{J_A}\,\frac{c_1}{m} + \frac{c_1\,c_2 - c_D^2}{J_A\,m} = 0. \tag{II.35}$$

Four natural frequencies ω_e can be found at all rotational frequencies Ω. A typical characteristic of these natural frequencies can be seen here.

Es ergeben sich für alle Drehkreisfrequenzen Ω vier Eigenfrequenzen ω_e. Ein typischer Verlauf dieser Eigenfrequenzen sieht wie folgt aus.



Again a forward-whirl natural frequency approaches the function $f_e = \frac{J_P}{J_A} f_d$ assymptotically. An additional forward-whirl as well as an additional backward-whirl natural frequency approaches the constant value $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_1}{m}}$ asymptotically. We can see this easily as the terms of first and third order of eq. (II.35) are dominant at high rotational frequencies. Neglecting the terms of fourth, second and zeroth order we obtain

Erneut nähert sich eine Gleichlaufeigenfrequenz der Funktion $f_e = \frac{J_P}{J_A} f_d$ asymptotisch an. Eine weitere Gleichlaufeigenfrequenz und eine weitere Gegenlaufeigenfrequenz nähern sich von je einer Seite der konstanten Größe $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_1}{m}}$ asymptotisch an. Dies lässt sich leicht ersehen, da bei extremen Drehfrequenzen die Terme erster und dritter Ordnung der Gleichung (II.35) dominieren. Bei Vernachlässigung der Terme vierter, zweiter und nullter Ordnung verbleibt dann

$$-\omega_e^3\,\Omega\,\frac{J_P}{J_A} + \omega_e\,\Omega\,\frac{J_P}{J_A}\,\frac{c_1}{m} = 0, \qquad \text{oder} \qquad \omega_e^3 - \omega_e\,\frac{c_1}{m} = 0.$$

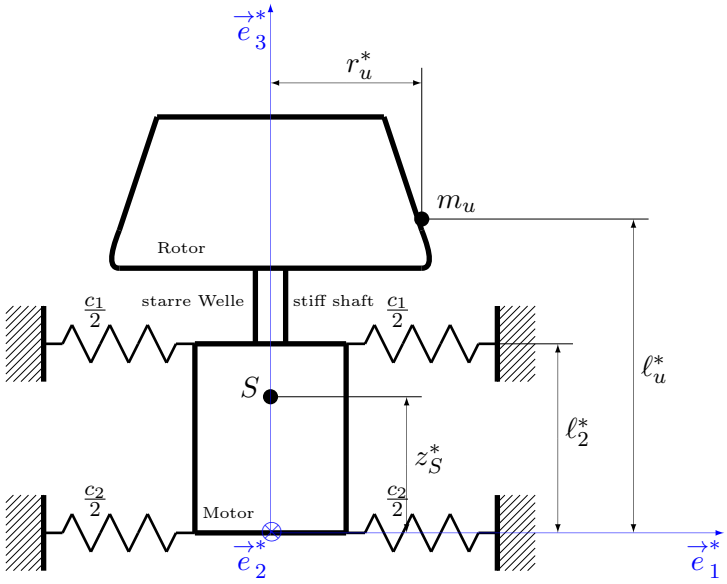
the roots of this polynomal are

Die Nullstellen dieses Ploynoms lauten dann

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{c_1}{m}}$$

It depends on the ratio $\frac{J_P}{J_A}$ whether we obtain one or two critical rotational angular frequencies. Again we can find that backward-whirl natural frequencies cannot be excited by unbalance if the rotor is supported by isotropic bearings.
We find a similar characteristic of natural frequencies for a centrifuge that is closer to reality.

Es können in Abhängigkeit vom Quotienten $\frac{J_P}{J_A}$ ein oder zwei kritische Drehkreisfrequenzen auftreten. Auch hier gilt: Bei isotroper Lagerung sind Gegenläufe durch Unwucht nicht anzuregen.
Einen ähnlichen Eigenfrequenzverlauf weist eine realitätsnahe Zentrifuge auf.



If we assume an elastic shaft, the number of the degrees of freedom increases from 2 to 4 for each plane. Considering both the elasticity of the bearings and the elasticity of the shaft we are able to describe nearly every single-rotor system.

Bei Berücksichtigung der Elastizität der Welle erhöht sich die Zahl der Freiheitsgrade von 2 auf 4 pro Ebene. Bei einer solchen Berücksichtigung der Lagerungselastizität und der Wellenelastizität sind dann nahezu alle Einzelrotorsysteme beschreibbar.

3 Anisotropic Rotor Systems

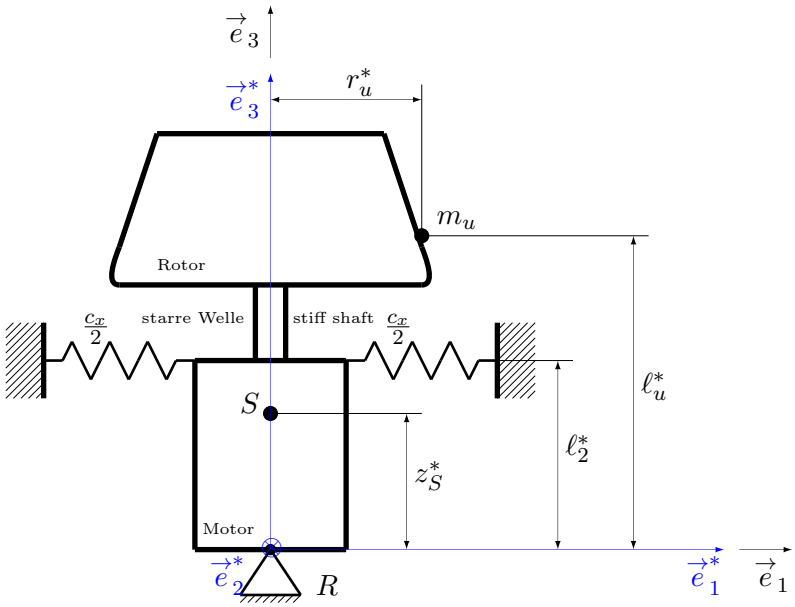
Anisotrope Rotorsysteme

3.1 Anisotropic Bearings

Anisotrope Lagerung

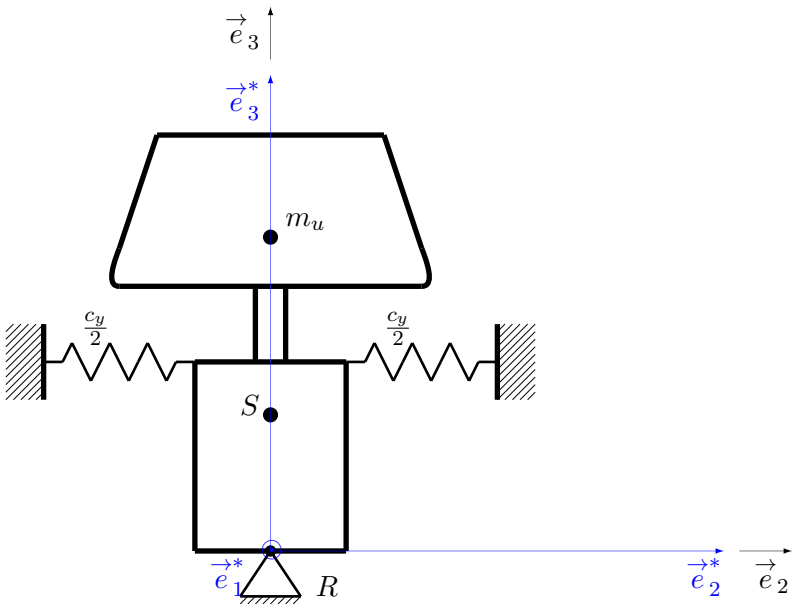
Let us again consider the simplified centrifuge described in chapter 2.3.2. Springs with the spring constant $\frac{c_x}{2}$ are mounted in the x - z - plane (also called $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_3$ - plane).

Betrachtet sei das Beispiel der Zentrifuge aus Kapitel 2.3.2. Bei der nun folgenden Betrachtung seien die insgesamt vier Federn paarweise verschieden. In der x - z - Ebene (auch $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_3$ - Ebene) seien die Federn $\frac{c_x}{2}$ angebracht.



In the orthogonal y - z - plane (or $\vec{e}_2$ - $\vec{e}_3$ - plane) springs with a different spring constant $\frac{c_y}{2}$ are applied.

In der hierzu senkrecht stehenden y - z - Ebene ($\vec{e}_2$ - $\vec{e}_3$ - Ebene) seien Federn mit einer anderen Federsteifigkeit $\frac{c_y}{2}$ angebracht.



The moments with respect to pivot R are

Die Momente bezüglich des Lagerungspunktes R lauten dann

$$M_{yO} \approx (P_{1x} + P_{2x})\,\ell_2^* \qquad \text{where / mit} \qquad P_{1x} = P_{2x} = -\frac{c_x}{2}\,\ell_2^*\,\beta. \tag{III.1}$$

In the orthogonal plane we find

Senkrecht dazu gilt

$$M_{xO} \approx -(P_{1y} + P_{2y})\,\ell_2^* \qquad \text{where / mit} \qquad P_{1y} = P_{2y} = \frac{c_y}{2}\,\ell_2^*\,\alpha. \tag{III.2}$$

Again we presume that the unbalance m_u is located on the x^* - axis, which leads to $\varphi^* = 0$

Es wird wieder angenommen, dass die Unwuchtmasse m_u auf der x^* - Achse liegt, daher gilt $\varphi^* = 0$.

Applying eq. (II.7) yields

Aus Gleichung (II.7) folgt

$$\begin{aligned} -c_y\,\ell_2^{*2}\,\alpha &= J_A\,\ddot{\alpha} + J_P\,\Omega\,\dot{\beta} + m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2\,\sin\Omega t \\ -c_x\,\ell_2^{*2}\,\beta &= J_A\,\ddot{\beta} - J_P\,\Omega\,\dot{\alpha} - m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2\,\cos\Omega t. \end{aligned} \tag{III.3}$$

3.1.1 Characteristics of Natural Frequencies

Eigenfrequenzverläufe

The homogeneous system is

Hierzu wird das homogene System betrachtet

$$\begin{aligned} J_A\,\ddot{\alpha} + J_P\,\Omega\,\dot{\beta} + c_y\,\ell_2^{*2}\,\alpha &= 0, \\ J_A\,\ddot{\beta} - J_P\,\Omega\,\dot{\alpha} + c_x\,\ell_2^{*2}\,\beta &= 0. \end{aligned} \tag{III.4}$$

We choose an harmonic approach

Es wird ein harmonischer Ansatz gewählt

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_{01}\,\sin\omega_e t + \alpha_{02}\,\cos\omega_e t,\\ \beta &= \beta_{01}\,\sin\omega_e t + \beta_{02}\,\cos\omega_e t.\end{aligned}$$

Applying the approach and comparing the coefficients for the sinus- and cosinus-terms we obtain a system of four equations for the four amplitudes α_{01}, α_{02}, β_{01}, β_{02} to be calculated.

Nach Einsetzen des Ansatzes und Koeffizientenvergleich für die Sinus- und Cosinusterme ergibt sich ein Gleichungssystem für die vier unbekannten Amplituden α_{01}, α_{02}, β_{01}, β_{02}.

$$\begin{aligned}-J_A\,\alpha_{01}\,\omega_e^2 - J_P\Omega\,\omega_e\,\beta_{02} + c_y\,\ell_2^{*2}\,\alpha_{01} &= 0,\\ -J_A\,\alpha_{02}\,\omega_e^2 + J_P\Omega\,\omega_e\,\beta_{01} + c_y\,\ell_2^{*2}\,\alpha_{02} &= 0,\\ -J_A\,\beta_{01}\,\omega_e^2 + J_P\Omega\,\omega_e\,\alpha_{02} + c_x\,\ell_2^{*2}\,\beta_{01} &= 0,\\ -J_A\,\beta_{02}\,\omega_e^2 - J_P\Omega\,\omega_e\,\alpha_{01} + c_x\,\ell_2^{*2}\,\beta_{02} &= 0.\end{aligned} \tag{III.5}$$

This system of equations can be written in matrix notation

Dieses Gleichungssystem kann wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{pmatrix} c_y\,\ell_2^{*2} - J_A\,\omega_e^2 & 0 & 0 & -J_P\,\Omega\,\omega_e \\ 0 & c_y\,\ell_2^{*2} - J_A\,\omega_e^2 & J_P\,\Omega\,\omega_e & 0 \\ 0 & J_P\,\Omega\,\omega_e & c_x\,\ell_2^{*2} - J_A\,\omega_e^2 & 0 \\ -J_P\,\Omega\,\omega_e & 0 & 0 & c_x\,\ell_2^{*2} - J_A\,\omega_e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \\ \beta_{01} \\ \beta_{02} \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{III.6}$$

It is solvable if and only if the coefficient determinant vanishes. The characteristic polynomal is

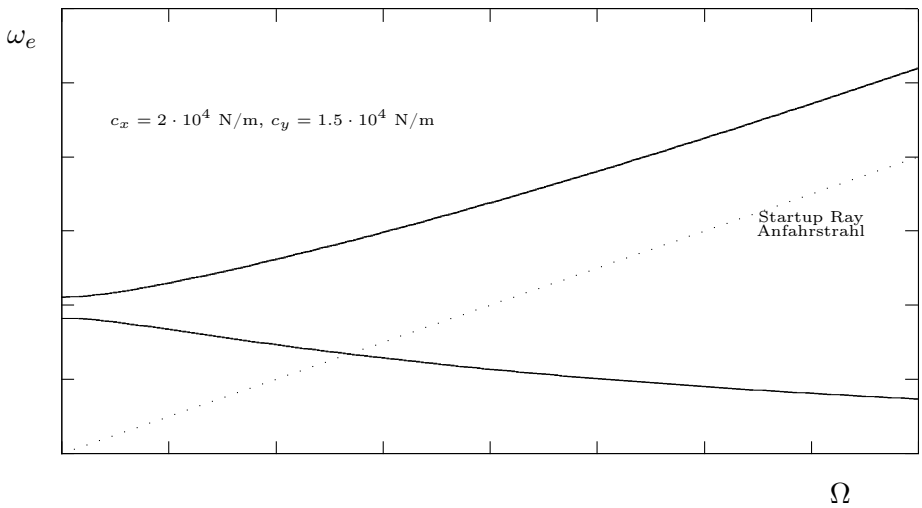
Es ist d.u.n.d. lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix Null ist. Das Charakteristische Polynom lautet

$$\left(\omega_e^4\,J_A^2 - \omega_e^2\left((c_x + c_y)\,J_A\,\ell_2^{*2} + J_P^2\,\Omega^2\right) + c_x\,c_y\,\ell_2^{*4}\right)^2 = 0. \tag{III.7}$$

The characteristic of the natural frequencies is

Der Verlauf der Eigenkreisfrequenzen kann wie folgt dargestellt werden:

Anisotropic Bearings Anisotrope Lagerung



As expected, we find two natural frequencies when the rotor comes to rest. Otherwise, there is no further significant change in the characteristic of forward and backward whirl.

Erwartungsgemäß stellen sich bei Stillstand zwei Eigenkreisfrequenzen ein. Ansonsten unterscheidet sich der Verlauf von Gleich- und Gegenlauf nur minimal von dem bei isotroper Lagerung.

3.1.2 External Excitation

Äußere Anregung

Again an unbalance of mass m_u revolves with the angular frequency Ω and again we choose an approach according to the right-hand side.

Wieder läuft eine Unwuchtmasse m_u mit der Drehkreisfrequenz Ω um. Erneut wird ein Ansatz nach Art der rechten Seite gewählt.

$$\alpha = \alpha_a \sin \Omega t; \qquad \beta = \beta_a \cos \Omega t.$$

Applying this approach on eq. (III.3) and comparing the coefficients of the sinus- and cosinus-terms we get

Er wird in Gleichung (III.3) eingesetzt. Der sich anschließende Koeffizientenvergleich für die Sinus- und Cosinusglieder ergibt

$$\begin{aligned} -J_A\,\alpha_a\,\Omega^2 - J_P\,\Omega^2\,\beta_a + c_y\,\ell_2^{*2}\alpha_a &= -m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2 \\ -J_A\,\beta_a\,\Omega^2 - J_P\,\Omega^2\,\alpha_a + c_x\,\ell_2^{*2}\beta_a &= m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2 \end{aligned} \tag{III.8}$$

or in matrix notation

oder in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} c_y\,\ell_2^{*2} - J_A\,\Omega^2 & -J_P\,\Omega^2 \\ -J_P\,\Omega^2 & c_x\,\ell_2^{*2} - J_A\,\Omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_a \\ \beta_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2 \\ m_u\,r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2 \end{pmatrix}. \tag{III.9}$$

The angular displacement amplitudes α_a and β_a can be found as

Für die Auslenkungsamplituden α_a und β_a gilt dann

$$\begin{aligned}\alpha_a &= \frac{m_u\, r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2\,\left((J_A + J_P)\,\Omega^2 - c_x\,\ell_2^{*2}\right)}{\Omega^4\,(J_A^2 - J_P^2) - \Omega^2\,J_A\,\ell_2^{*2}\,(c_x + c_y) + c_x\,c_y\,\ell_2^{*4}} \\ \beta_a &= \frac{-m_u\, r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)\,\Omega^2\,\left((J_A + J_P)\,\Omega^2 - c_y\,\ell_2^{*2}\right)}{\Omega^4\,(J_A^2 - J_P^2) - \Omega^2\,J_A\,\ell_2^{*2}\,(c_x + c_y) + c_x\,c_y\,\ell_2^{*4}}\end{aligned} \tag{III.10}$$

To discuss the angular displacement amplitudes more easily, we sum up the orthogonal values geometrically

Um die ermittelten Auslenkungsamplituden anschaulich diskutieren zu können werden die beiden orthogonalen Größen α_a und β_a geometrisch addiert.

$$\Phi_a = \sqrt{\alpha_a^2 + \beta_a^2}.$$

Using the abbreviation $J_u = m_u\, r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)$ we have

Es gilt mit der Abkürzung $J_u = m_u\, r_u^*\,(\ell_u^* - z_S^*)$:

$$\Phi_a = J_u\,\Omega^2\,\frac{\sqrt{2\,\Omega^4\,(J_A + J_P)^2 - 2\,\Omega^2\,(J_A + J_P)\,(c_x + c_y)\,\ell_2^{*2} + (c_x^2 + c_y^2)\,\ell_2^{*4}}}{\Omega^4\,(J_A^2 - J_P^2) - \Omega^2\,J_A\,\ell_2^{*2}\,(c_x + c_y) + c_x\,c_y\,\ell_2^{*4}} \tag{III.11}$$

Discussion of Equation (III.11)

Diskussion von Gleichung (III.11)

Depending on the ratio of the parameters

In Abhängigkeit von den Parameterverhältnissen

$$v_J = \frac{J_P}{J_A} \qquad \text{and / und} \qquad v_c = \frac{c_x - c_y}{c_x + c_y}$$

the denominator of eq. (III.11) can have two, one or no real roots. Real roots in the denominator indicate extremely increasing amplitudes Φ_a and hence indicate resonance.

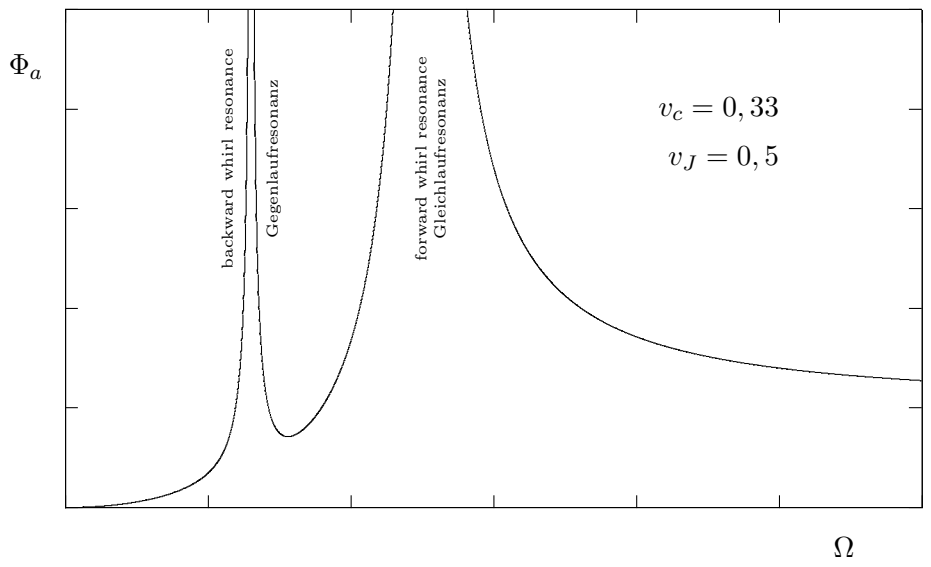
kann der Nenner von Gleichung (III.11) zwei, eine oder keine reelle Nullstelle aufweisen. Reelle Nullstellen im Nenner weisen auf beliebig ansteigende Schwingungsamplituden Φ_a und somit auf Resonanz hin.

Two Real Roots

Zwei reelle Nullstellen

occur if $v_c \neq 0$ and $v_J < 1$. The first relation describes the here considered anisotropical bearing, the second one describes a long and tall rotor, whose axial moment of inertia is greater than the polar. The developing of the angular diplacement Φ_a with respect to the rotary angular frequency Ω is:

stellen sich ein, wenn gilt $v_c \neq 0$ und $v_J < 1$. Die erste Bedingung beschreibt die hier betrachtete anisotrope Lagerung, die zweite Bedingung beschreibt einen langgestreckten Rotor, dessen axiales Massenträgheitsmoment größer ist, als das polare. Der Verlauf der Auslenkungsamplitude Φ_a über der Drehkreisfrequenz Ω stellt sich in diesem Fall wie folgt dar:



Both backward- and forward-whirl natural frequencies can be excited by means of unbalance and lead to resonance.

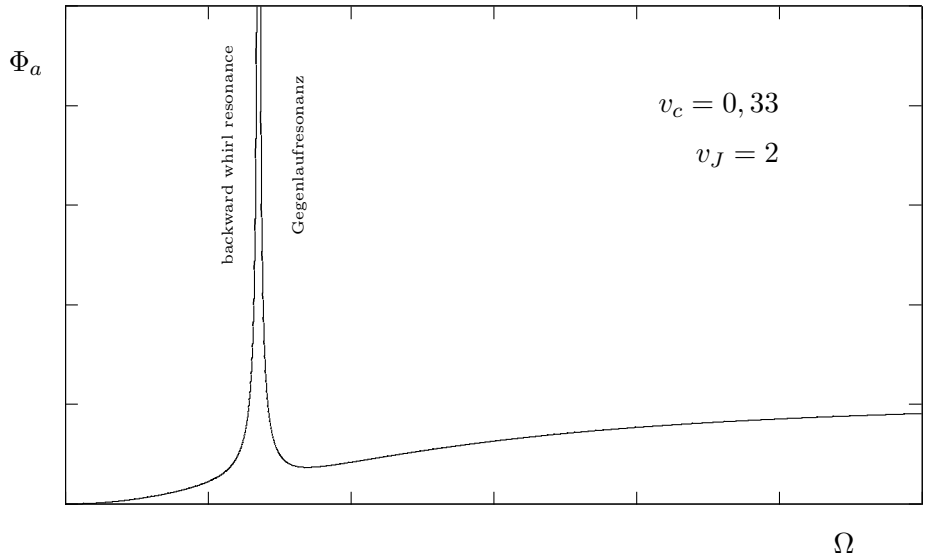
Sowohl die Gegenlauf- als auch die Gleichlaufeigenkreisfrequenz wird unter diesen Bedingungen durch Unwucht angeregt und führt zu Resonanz.

One Real Root

can be found if we keep the anisotropical bearing ($v_c \neq 0$). But now we have a discoidal rotor where $v_J > 1$. The diagram showing resonance is:

Eine relle Nullstelle

ergibt sich, wenn die anisotrope Lagerung beibehalten wird ($v_c \neq 0$). Es soll aber ein scheibenförmiger Rotor Verwendung finden, bei dem gilt $v_J > 1$. Das Resonanzdiagramm ändert sich dann wie folgt:



Only the backward-whirl natural frequency can be excited, a forward-whirl resonance cannot occur because the forward-whirl natural frequency increases faster than the rotatory frequency.

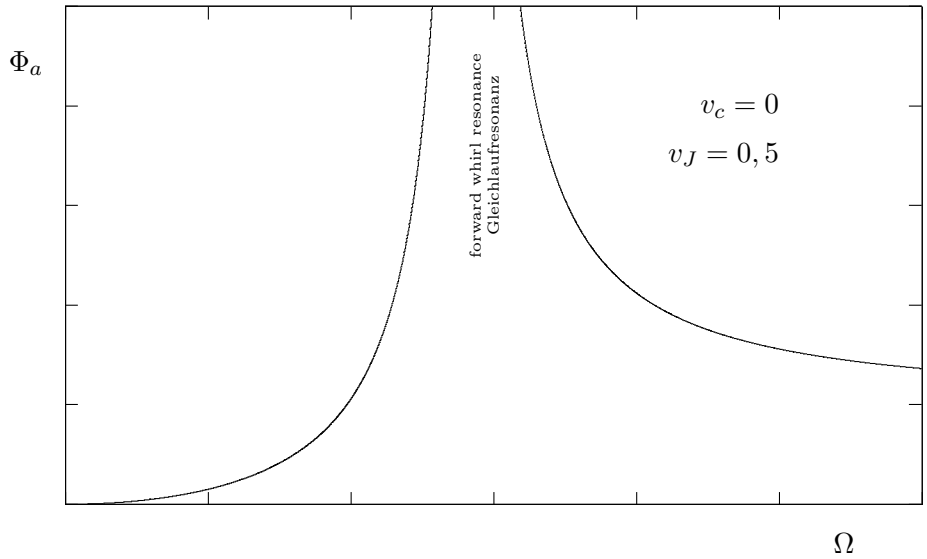
Lediglich die Gegenlaufeigenkreisfrequenz wird angeregt, eine Gleichlaufresonanz kann sich nicht einstellen, da die Gleichlaufeigenkreisfrequenz schneller ansteigt als die Drehkreisfrequenz.

One Real Root

can also be found when a long and tall rotor ($v_J < 1$) is supported by isotropical bearings ($v_c = 0$).

Eine relle Nullstelle

stellt sich auch ein, wenn ein langgestreckter Rotor ($v_J < 1$) isotrop gelagert wird ($v_c = 0$).

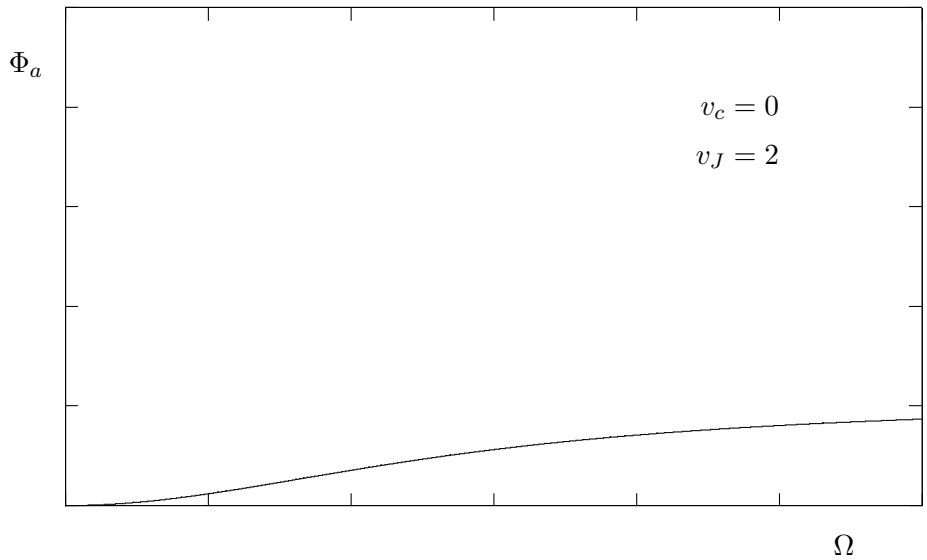


No Real Roots

occur when a discoidal rotor ($v_J > 1$) is supported by isotropical bearings ($v_c = 0$).

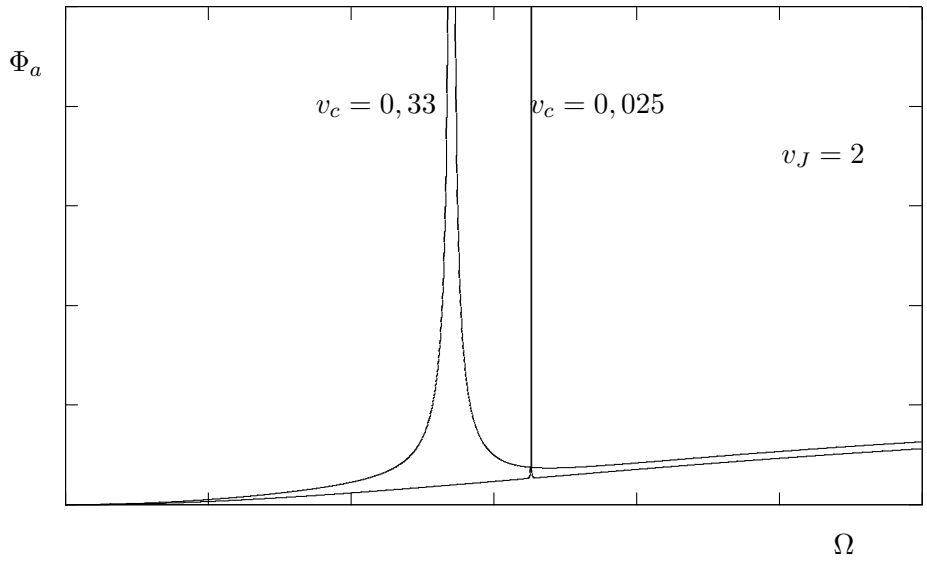
Keine relle Nullstelle

ist zu finden bei einem scheibenförmigen Rotor ($v_J > 1$), der isotrop gelagert ist ($v_c = 0$).



Concluding we should look at how the quantity of anisotropy influences the behaviour of a rotor system. Even the slightest deviation between the two spring constants c_x and c_y ($v_c \approx 0$) allow a backward-whirl resonance. Severe anisotropies (e.g. $v_c = 0,33$) lead to a backward-whirl resonance which is more broadbanded, which can be seen very clearly with an anisotropically beared discoidal rotor.

Abschließen ist zu betrachten, welchen Einfluss der Grad der Anisotropie aufweist. Schon geringste Abweichungen zwischen den beiden Federsteifigkeiten c_x und c_y ($v_c \approx 0$) ermöglichen eine Gegenlaufresonanz. Starke Anisotrtopien (z. B. $v_c = 0,33$) führen zu einer etwas breitbandigeren Gegenlaufresonanz. Am Beispiel eines anisotrop gelagerten scheibenförmigen Rotors sei dies verdeutlicht.



Real rotor systems will have a slight anisotropy on principle, which is obvious when we look at rotor systems with horizontal shafts. Let us consider a system with pedestal bearing houses for example. In vertical direction the housing is strained according to tension and pressure, in horizontal direction according to bending. We cannot assume that the stiffnesses in both directions are equal. Even if we have a vertical shaft we have to accept a slight anisotropy because real springs might have tolerances due to the production process. If we consider a laboratory centrifuge we often find rotationsymmetric cast on elastic rubber bearings. Again we have to expect tolerances and therefore slight anisotropy. Nevertheless such slightly anisotropically beared rotor systems may hardly ever get damaged because of backward-whirl resonance.

Bei realen Rotorsystemen kann grundsätzlich von einer schwachen Anisotropie ausgegangen werden. Dies ist bei Systemen mit horizontaler Welle unmittelbar einsichtig. Ein beispielhaft betrachtetes Stehlagergehäuse wird in vertikaler Richtung auf Zug und Druck beansprucht, in horizontaler Richtung hingegen auf Biegung. Eine Gleichheit der Steifigkeiten in diesen Richtungen kann nicht angenommen werden. Selbst bei vertikaler Welle muss von schwacher Anisotropie ausgegangen werden, da reale diskrete Federn Herstellungstoleranzen unterliegen. Bei Laborzentifugen werden gelegentlich rotationssymmetrische Polymerformteile verwendet, um die elastische Lagerung zu realisieren. Selbst hier muss fertigungsbedingt von schwacher Anisotropie ausgegangen werden. Trotzdem werden solchermaßen schwach anisotrop gelagerte Rotorsysteme kaum durch Gegenlaufresonanz Schaden erleiden.

The rotor would have to be operated with exactly the resonance frequency over a certain period of time, which could in fact lead to considerable displacement amplitudes during this time. However, this process would withdraw energy from the rotor and its speed would decrease. The backward-whirl resonance of slight anisotrop systems is, as shown above, very narrow-banded. The decreasing speed helps the rotor system to leave the critical band.

Crossing such a backward-whirl resonance is assumed to be possible even with low angular acceleration due to the narrow band characteristic.

Only RPM-regulated systems may sustain damage from backward-whirl resonance when operated at an inappropriate duty point.

Ein Rotor müsste über eine gewisse Zeit mit exakt der Resonanzfrequenz betrieben werden. Während dieser Zeit würden sich tatsächlich erhebliche Auslenkungsamplituden entwickeln, da dieser Vorgang aber dem Rotor kinetische Energie der Rotation entzieht, wird die Drehzahl absinken. Die Gegenlaufresonanz bei schwach anisotrop gelagerten Rotorsystemen stellt sich aber, wie oben dargelegt, als sehr schmalbandig dar, so dass dieser schmale kritische Bereich umgehend wieder verlassen wird.

Das Durchfahren einer solchen Gegenlaufresonanz sollte wegen der Schmalbandigkeit auch mit geringen Winkelbeschleunigungen möglich sein.

Lediglich Systeme mit geregelter Drehzahl können bei ungünstiger Wahl des Betriebspunktes von Gegenlaufresonanz betroffen sein.

3.2 Anisotropic Shafts

Anisotropic shafts as considered here are shafts with two different area moments of inertia I_{a1}^* and I_{a2}^* about two orthogonal prinicipal axes. It is obvious that the area moments of inertia are noted in terms of the relative coordinate system, as the shaft revolves. These quantities are constant if noted in terms of the relative coordinate system, which revolves as well.

The term of "non-cicular shafts", used occasionally, is not very well defined, as non-circular shafts of sufficient symmetry can certainly be isotropical.

Ansisotropic shafts can be

- shafts with an elliptic cross section,
- shafts with a rectangular cross section,
- shafts with two opposing feather key grooves etc.

Ansiotrope Wellen

Anisotrope Wellen, so wie sie hier betrachtet werden sollen, seien Wellen, die um zwei senkrecht aufeinder stehenden Hauptachsen unterschiedliche Flächenträgheitsmomente I_{a1}^* und I_{a2}^* aufweisen. Es ist einsichtig, dass diese Flächenträgheitsmomente im Relativsystem $\mathcal{K}_R^*$ angegeben werden, da die Welle umläuft und nur im mitrotierenden System diese Größen als Konstanten angegeben werden können.

Der gelegentlich gewählte Begriff der „nicht runden Welle“ ist weniger eindeutig. Nicht runde Wellen können bei ausreichender Symmetrie sehr wohl isotrop sein.

Ansisotrope Wellen können sein

- Wellen mit elliptischem Querschnitt,
- Wellen mit rechteckigem Querschnitt,
- Wellen mit zwei gegenüberliegenden Passfedernuten o.ä..

3.2.1 Jeffcott Rotor with Anisotropic Shaft

Lavalläufer mit ansiotroper Welle

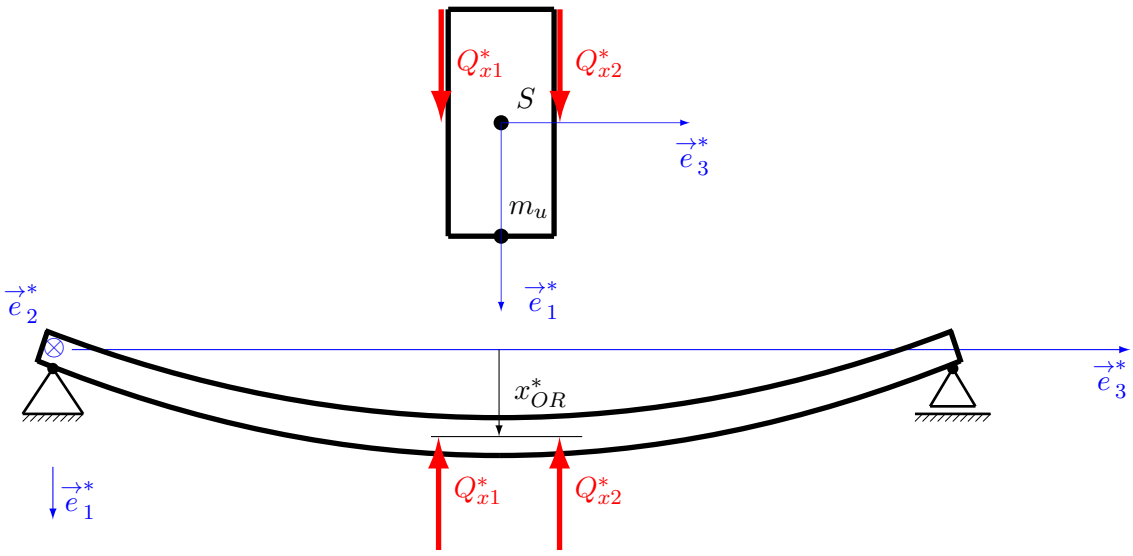
As described in chapter 2.3.1, angular displacements of the rotor according to the cardanic angles α and β are not possible. Further restrictions characterized in the same chapter are applied again.

Wie in Kapitel 2.3.1 beschrieben, ist eine Neigung des Rotors entsprechend der kardanischen Winkel α und β nicht möglich. Weitere ebendort beschriebenen Einschränkungen gelten unverändert.

$$\begin{aligned} z_S^* &= 0, \\ \ell_u^* &= 0, \\ \left(\vec{r}^{\,*}_{RS}\right)^{\bullet} &= 0, \\ \left(\vec{r}^{\,*}_{RS}\right)^{\bullet\bullet} &= 0, \\ \underline{M} &= 0. \end{aligned} \tag{III.12}$$

Again we cut the rotor free from the now unisotropic shaft. Unlike in chapter 2.3.1 the cutting forces are considered in the relative coordinate system $\mathcal{K}_R^*$.

Erneut werde der Rotor in ausgelenktem Zustand von der nun anisotropen Welle freigeschnitten. Anders als in Kapitel 2.3.1 werden die Schnittgrößen im Relativsystem $\mathcal{K}_R^*$ betrachtet.



When assigning load and displacement quantities, we have to keep in mind that the area moment of inertia about the $\vec{e}_1^{\,*}$-axis is I_{a1}^*. Respectively the area moment of inertia about the $\vec{e}_2^{\,*}$-axis is I_{a2}^*.

Bei der Verknüpfung der Kraft- mit den Verformungsgrößen muss nun berücksichtigt werden, dass die Welle um die Achse $\vec{e}_1^{\,*}$ das Flächenträgheitsmoment I_{a1}^* aufweist und um die Achse $\vec{e}_2^{\,*}$ das Flächenträgheitsmoment I_{a2}^*.

We can define the spring constant of a symmetrically loaded shaft by

Die Federsteifigkeit einer mittig belasteten Welle wird beschrieben durch

$$c = \frac{48\,E\,I}{\ell^3},$$

In this case, we can describe the shaft stiffness by means of constant quantities only in the relative coordinate system.

Im vorliegenden Fall kann die Wellensteifigkeit nur im Relativsystem $\mathcal{K}_R^*$ mit konstanten Größen beschrieben werden.

$$c_1^* = \frac{48\,E\,I_{a2}^*}{\ell^3}, \qquad c_2^* = \frac{48\,E\,I_{a1}^*}{\ell^3} \tag{III.13}$$

where

mit

c_1^*, c_2^* : shaft stiffness when displaced in $\vec{e}_1^{\,*}$, $\vec{e}_2^{\,*}$ - direction,

Wellensteifigkeiten bei Verformung in $\vec{e}_1^{\,*}$, $\vec{e}_2^{\,*}$ - Richtung,

E : YOUNG's[9] modulus,

YOUNG'scher[9] Elastizitätsmodul,

ℓ : length of the shaft.

Länge der Welle.

We have to consider that a displacement of the shaft in $\vec{e}_1^{\,*}$ - direction causes a bending about the $\vec{e}_2^{\,*}$ - axis. We find HOOK's Laws as

Es ist zu beachten, dass eine Verformung der Welle in $\vec{e}_1^{\,*}$ - Richtung eine Biegung um die $\vec{e}_2^{\,*}$ - Achse verursacht. Die Federgesetze lauten dann

$$F_x^* = -c_1^*\,x_{OR}^*, \qquad F_y^* = -c_2^*\,y_{OR}^* \qquad \text{or / oder} \qquad \vec{F}^* = -\underline{\underline{C}}^*\;\vec{r}_{OR}^{\,*} \tag{III.14}$$

[9] Thomas YOUNG (* 13 June 1773 in Milverton, Somersetshire; † 10 May 1829 in London); British polymath. He was able to read fluently at the age of two. At the age of 14 he had already learnd ancient Greek, Latin, French, Hebrew and several Arabic idioms. He studied medical science in London, Edinburgh and Göttingen but it was said that he was more interested in illnesses than in patients. He realized that we see colours by three different sorts of receptor cells one for each primary colour. He published his famous paper on the wave theory of light and his important work on elasticity. YOUNG seemed able to solve problems on nearly any subject but this ability was also a mixed blessing because his intellect was so easy to stimulate that he jumped from discipline to discipline. He pitched into a new problem before he resolved the previous completely.
He began to encrypt most of the hieroglyphs using the 1799 found Rosette-Stone of the year 196 B.C., which was written with the same passage of writing in hieroglyphic, demotic and ancient Greek
(Source: S. Singh, *The Code Book*, (Fourth Estate, London 1999).

Thomas YOUNG (* 13. Juni 1773 in Milverton, Somersetshire; † 10. Mai 1829 in London); englischer Universalgelehrter. Er konnte mit zwei Jahren fließend lesen, mit vierzehn hatte er Griechisch, Latein, Französisch, Hebräisch sowie mehrere arabische Dialekte gelernt. Er studierte Medizin unter anderem in Göttingen, doch es hieß, er sei nur an Krankheiten interessiert, nicht jedoch an den Patienten. Er erkannte, dass das Farbensehen mittels dreier Rezeptorentypen, einem für jede Primärfarbe, vonstatten geht. Er veröffentlichte die klassische Abhandlung *Die Wellentheorie des Lichts*, entwickelte eine neue und bessere Erklärung für die Gezeiten, definierte den Begriff der Energie und veröffentlichte bahnbrechende Arbeiten über das Thema Elastizität. YOUNG schien fähig, Probleme auf fast jedem Gebiet zu lösen, doch dies wirkte sich nicht unbedingt zu seinem Vorteil aus. Sein Denken war so leicht zu reizen, dass er von Fach zu Fach sprang und sich über ein neues Problem hermachte, bevor das alte endgültig geklärt war. So begann er anhand des 1799 gefundenen Rosette-Steins aus dem Jahre 196 v. Chr., der Fragmente des gleichen Textes in Hieroglyphisch, in Demotisch und in Griechisch enthielt, die meisten Hieroglyphen zu entziffern (Quelle: S. Singh, *Geheime Botschaften*, (Carl Hanser, München 2000)).

where

$$\vec{F}^* = \begin{pmatrix} F_x^* \\ F_y^* \\ F_z^* \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}^*_{OR} = \begin{pmatrix} x_{OR}^* \\ y_{OR}^* \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{C}}^* = \begin{pmatrix} c_1^* & 0 & 0 \\ 0 & c_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Equations of Motion

We use NEWTON's Second Law of Motion in Translation as described in eq. (I.20). Applying the restrictions shown in eq. (III.12) we get

$$\vec{F}^* = m\,\underline{\underline{Q}}\,\dot{\vec{v}}_{OR} + m\left(\vec{w}^* \times (\vec{w}^* \times \vec{r}^*_{RS})\right). \tag{III.15}$$

If we used NEWTON's Second Law for the displacements x_{OR}, y_{OR} in the absolote coordinate system, we would obtain differential equations with coefficients which are functions of time (e.g. MATHIEU's[10] differential equation). Usually these equations cannot be solved algebraically, hence we will derive equations of motion in terms of the relative coordinate system for the displacements x_{OR}^*, y_{OR}^*. These differential equations will have constant coefficients, as expected.

In the above stated special case we find

$$\vec{w}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}^*_{RS} = \frac{m_u}{m}\, r_u^* \begin{pmatrix} \cos\varphi^* \\ \sin\varphi^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{Q}}^* = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0 \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The vector $\dot{\vec{v}}_{OR} = \ddot{\vec{r}}_{OR}$ is noted in the absolute coordinate system, as we can see. In this case we need to derive the equations of motion for the displacements $\dot{x}_{OR}$, $\dot{y}_{OR}$ in the relative coordinate system, hence

mit

Bewegungsgleichungen

Ausgangspunkt ist der Schwerpunktsatz, wie er in Gleichung (I.20) dargestellt ist. Mit den in Gleichung (III.12) beschriebenen Einschränkungen gilt

Würde dieser Schwerpunktsatz für die Auslenkungen im Inertialsystem x_{OR}, y_{OR} aufgestellt werden, so entstünden Differenzialgleichungen mit zeitveränderlichen Koeffizienten (z. B. MATHIEU'sche[10] Gleichungen). Da diese üblicherweise nicht geschlossen lösbar sind, werden die hier zu entwickelnden Bewegungsgleichungen konsequent für die Auslenkungen x_{OR}^*, y_{OR}^* im Relativsystem aufgestellt. Die so entstehenden Differenzialgleichungen werden dann erwartungsgemäß konstante Koeffizienten aufweisen.

Für den vorliegenden Spezialfall gilt:

Der Vektor $\dot{\vec{v}}_{OR} = \ddot{\vec{r}}_{OR}$ wird erkennbar im Inertialsystem notiert. Gesucht sind aber Bewegungsgleichungen für die Auslenkungsgrößen im Relativsystem. Es gilt

[10] EMILE LEONARD MATHIEU (* 15 May 1835 in Metz; † 19 October 1890 in Nancy) French mathematician. He has given his name for MATHIEU groups and MATHIEU differential equations (Source: www.en.wikipedia.org, 2007).

EMILE LEONARD MATHIEU (* 15. Mai 1835 in Metz; † 19. Oktober 1890 in Nancy) französischer Mathematiker. Nach ihm sind die MATHIEU'schen Gruppen sowie die MATHIEU'schen Differenzialgleichungen benannt (Quelle: www.de.wikipedia.org, 2007).

$$m\,\underline{\underline{Q}}\,\dot{\vec{v}}_{OR} = m\,\underline{\underline{Q}}\,\left(\underline{\underline{Q}}^{*}\,\vec{r}^{\,*}_{OR}\right)^{\bullet\bullet} = m\,\begin{pmatrix} (x^*_{OR})^{\bullet\bullet} - 2\,\Omega\,(y^*_{OR})^{\bullet} - \Omega^2\,x^*_{OR} \\ (y^*_{OR})^{\bullet\bullet} + 2\,\Omega\,(x^*_{OR})^{\bullet} - \Omega^2\,y^*_{OR} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

We find the equations of motion as

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} (x^*_{OR})^{\bullet\bullet} - 2\,\Omega\,(y^*_{OR})^{\bullet} - \left(\Omega^2 - \frac{c^*_1}{m}\right)x^*_{OR} &= \frac{m_u}{m}\,r^*_u\,\Omega^2\,\cos\varphi^*, \\ (y^*_{OR})^{\bullet\bullet} + 2\,\Omega\,(x^*_{OR})^{\bullet} - \left(\Omega^2 - \frac{c^*_2}{m}\right)y^*_{OR} &= \frac{m_u}{m}\,r^*_u\,\Omega^2\,\sin\varphi^*. \end{aligned} \tag{III.16}$$

To arrange these equations more concisely we define some parameters.

Um das zu lösende Gleichungssystem übersichtlicher zu gestalten, werden einige Parameter definiert.

The anisotropy of the shaft is defined as

Definition der Wellenanisotropie:

$$v_i = \frac{I^*_{a2} - I^*_{a1}}{I^*_{a2} + I^*_{a1}} = \frac{c^*_1 - c^*_2}{c^*_1 + c^*_2}. \tag{III.17}$$

Arbitrarily we configure that positive values of v_i stand for I^*_{a2} being the greater area moment of inertia, which is about the $\vec{e}^{\,*}_2$ - axis. Hence a shaft with $v_i > 0$ is stiffer in $\vec{e}^{\,*}_1$ than in $\vec{e}^{\,*}_2$ - direction. There is no generel restriction implicated by this definition because we are still able to position the unbalance wherever we want due to the parameter φ^*.

Willkürlich wird festgelegt, dass bei positiven Werten für v_i das größere Flächenträgheitsmoment I^*_{a2} Biegung um die $\vec{e}^{\,*}_2$ - Achse beschreibt. Die Folge ist, dass die Welle bei Verformungen in $\vec{e}^{\,*}_1$ - Richtung steifer ist, als in $\vec{e}^{\,*}_2$ - Richtung. Eine Einschränkung der Allgemeinheit liegt durch diese Festlegung nicht vor, da die Lage der Unwuchtmasse m_u über den Parameter φ^* noch beliebig anzuordnen ist.

Then we define a mean natural angular frequency

Definition einer mittleren Eigenkreisfrequenz:

$$\omega^2 = \frac{c^*_1 + c^*_2}{2\,m}. \tag{III.18}$$

We could find this natural frequency if we had a JEFFCOTT rotor equipped with an isotropic shaft with identical area moments of inertia about two principal axis, which are both equal to the average over I^*_{a1} and I^*_{a2}.

Diese Eigenkreisfrequenz wäre bei einem LAVALläufer zu finden, der mit einer isotropen Welle ausgestattet ist, die ein einheitliches, aus I^*_{a1} und I^*_{a2} gemitteltes Flächenträgheitsmoment besitzt.

Finally we define the excentricity as

Definition der Exzentrizität:

$$e^* = \frac{m_u}{m}\,r^*_u. \tag{III.19}$$

This is the distance between the common centre of gravity and the figure axis due to the presence of the unbalance. Using these definitions we write the equations of motion (III.16) as

Der Gesamtschwerpunkt des Rotors hat wegen der Unwucht den Abstand e^* vom Wellendurchstoßpunkt. Mit diesen Definitionen lauten die Bewegungsgleichungen (III.16)

$$\begin{aligned}(x^*_{OR})^{\bullet\bullet} - 2\,\Omega\,(y^*_{OR})^{\bullet} + \left(\omega^2\,(1+v_i) - \Omega^2\right)\,x^*_{OR} &= e^*\,\Omega^2\,\cos\varphi^*,\\ (y^*_{OR})^{\bullet\bullet} + 2\,\Omega\,(x^*_{OR})^{\bullet} + \left(\omega^2\,(1-v_i) - \Omega^2\right)\,y^*_{OR} &= e^*\,\Omega^2\,\sin\varphi^*.\end{aligned} \tag{III.20}$$

or

oder

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}(x^*_{OR})^{\bullet\bullet}\\ (y^*_{OR})^{\bullet\bullet}\end{pmatrix} &+ \begin{pmatrix}0 & -2\Omega\\ 2\Omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x^*_{OR})^{\bullet}\\ (y^*_{OR})^{\bullet}\end{pmatrix}\\ &+ \begin{pmatrix}\omega^2\,(1+v_i) - \Omega^2 & 0\\ 0 & \omega^2\,(1-v_i) - \Omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*_{OR}\\ y^*_{OR}\end{pmatrix}\\ &= e^*\,\Omega^2\begin{pmatrix}\cos\varphi^*\\ \sin\varphi^*\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{III.21}$$

3.2.3 Characteristics of the Natural Frequencies

Bestimmung der Eigenfrequenzverläufe

For the homogeneous system we choose an exponential approach like

Für das homogene System wird diesmal ein Exponentialansatz folgender Art gewählt:

$$x^*_{OR} = x^*_0\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad y^*_{OR} = y^*_0\,\mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{III.22}$$

Applied to eq. (III.21) yields

Eingesetzt in Gleichung (III.21) ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda^2\,x^*_0 - 2\,\Omega\,\lambda\,y^*_0 + \left(\omega^2(1+v_i) - \Omega^2\right)\,x^*_0 &= 0,\\ \lambda^2\,y^*_0 + 2\,\Omega\,\lambda\,x^*_0 + \left(\omega^2(1-v_i) - \Omega^2\right)\,y^*_0 &= 0.\end{aligned}$$

This system of equations is solvable if and only if the coefficient determinant vanishes.

Dieses Gleichungssystem ist d.u.n.d. lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix Null wird.

$$\begin{vmatrix}\lambda^2 - \Omega^2 + (1+v_i)\,\omega^2 & -2\,\Omega\,\lambda\\ 2\,\Omega\,\lambda & \lambda^2 - \Omega^2 + (1-v_i)\,\omega^2\end{vmatrix} = 0 \tag{III.23}$$

Hence, the characteristic polynome is

Das charakteristische Polynom lautet demzufolge

$$\lambda^4 + 2\,\lambda^2\,(\Omega^2 + \omega^2) + (\Omega^2 - \omega^2)^2 - v_i^2\,\omega^4 = 0. \tag{III.24}$$

We find four roots

Die vier dazugehörigen Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-(\Omega^2 + \omega^2) \pm \sqrt{4\,\Omega^2\,\omega^2 + v_i^2\,\omega^4}}. \tag{III.25}$$

We realize that we can find only purely real or purely imaginary roots. Because the solutions of the homogeneous differential equations look like

Diesen vier Nullstellen ist anzusehen, dass es nur rein reelle und rein imaginäre geben kann. Da die Lösung der homogenen Differenzialgleichung wie folgt aussieht

$$\begin{aligned} x_{OR}^* &= x_{01}^* \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + x_{02}^* \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + x_{03}^* \mathrm{e}^{\lambda_3 t} + x_{04}^* \mathrm{e}^{\lambda_4 t}, \\ y_{OR}^* &= y_{01}^* \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + y_{02}^* \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + y_{03}^* \mathrm{e}^{\lambda_3 t} + y_{04}^* \mathrm{e}^{\lambda_4 t}, \end{aligned} \tag{III.26}$$

purely imaginary roots of the characteristic polynome lead to an harmonic part of the solutions. It is commonly known that

führen die rein imaginären Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu harmonischen Lösungsanteilen der Differenzialgleichung. Da bekannterweise gilt

$$\mathrm{e}^{j\omega t} = \cos\omega t + j\,\sin\omega t.$$

The purely real roots of the characteristic polynome lead to parts of the solution of a different characteristic:

Die rein reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms führen zu Lösungsanteilen der Differenzialgleichung in der Art

$$x_{OR}^* = x_{01}^*\,\mathrm{e}^{+R\,t} + x_{02}^*\,\mathrm{e}^{-R\,t} + \ldots \qquad \text{where } R \text{ is a real root / mit } R\text{: reelle Lösung.}$$

These parts of the solutions, which have a negative superscript, are damped out after a sufficiently long period of time. Hence they are not important any more. Otherwise, those parts of the solutions which have positive superscripts lead to an exponential amplification of the amplitudes x_{OR}^* and y_{OR}^*, which is an instability of the rotor system. Now we have to find out under which circumstances purely real roots of the characteristic polynome may occur. To show this very easily we define a dimensionless angular frequency like

Der Lösungsanteil mit negativem Exponenten ist nach hinreichend langer Zeit abgeklungen und nicht weiter von Bedeutung, der Anteil mit positivem Exponenten führt allerdings zu einem exponentiellen Anwachsen der Schwingungsamplituden x_{OR}^* und y_{OR}^* also zur Instabilität des Rotorsystems. Von entscheidender Bedeutung ist nun die Frage, unter welchen Umständen rein reelle Nullstellen des charakteristischen Polynoms auftreten. Um diese Frage besonders anschaulich beantworten zu können, wird eine dimensionslose Drehfrequenz definiert:

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega}.$$

We can see that we obtain purely real roots if

Es ist leicht zu sehen, dass reelle Nullstellen entstehen, wenn gilt

$$\sqrt{4\,\eta^2 + v_i^2} > \eta^2 + 1.$$

Instable behaviour can be found if the angular frequency of the rotor $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$ is within the interval

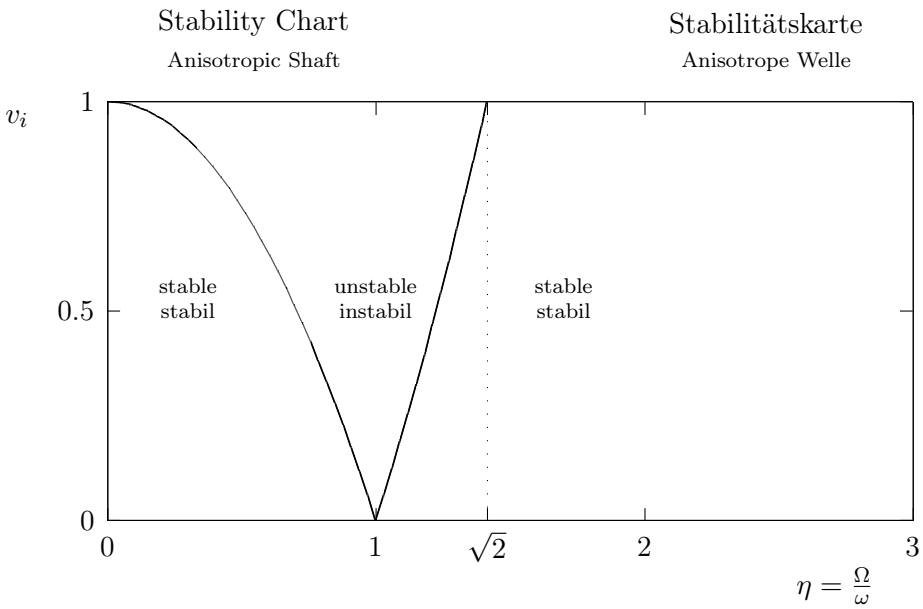
Instabiles Verhalten tritt also auf, wenn die Winkelgeschwindigkeit des Rotors $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$ im Bereich liegt.

$$\sqrt{1 - v_i} < \eta < \sqrt{1 + v_i}. \tag{III.27}$$

The borderlines between the stable and instable areas are the parabolas

Die Grenzlinien zwischen stabilem und instabilem Bereich sind die Parabeln

$$v_i = 1 - \eta^2 \qquad \text{and / und} \qquad v_i = \eta^2 - 1.$$



Let us now consider stable areas only. We find the purely imaginary roots as natural frequencies. Arbitrarily presuming λ_1 and λ_2 where purely real roots we have

Wenn nunmehr ausschließlich die stabilen Bereiche betrachtet werden, stellen die rein imaginären Nullstellen die Eigenkreisfrequenzen dar. Willkürlich sei angenommen dass die Nullstellen λ_1 und λ_2 rein imaginär seien, so gelte

$$\lambda_1 = j\,\omega_1 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = j\,\omega_2.$$

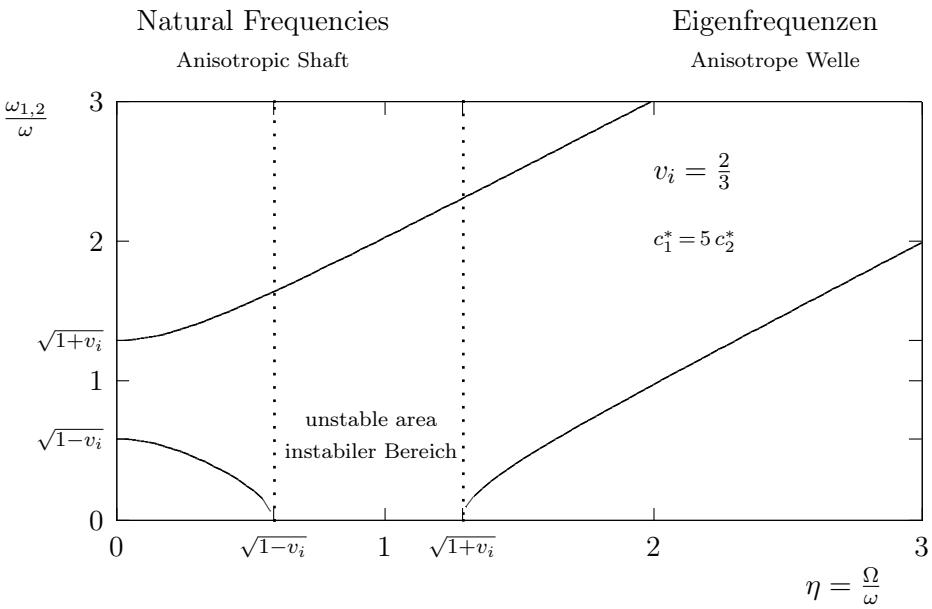
These two natural angular frequencies can be calculated according to eq. (III.25) like

Diese beiden Eigenkreisfrequenzen berechnen sich dann gemäß Gleichung (III.25) zu

$$\omega_{1,2} = \sqrt{(\Omega^2 + \omega^2) \pm \sqrt{4\,\Omega^2\,\omega^2 + v_i^2\,\omega^4}}. \tag{III.28}$$

In the next picture we normalise both the natural angular frequencies and the angular rotary frequency by the mean natural angular frequency ω as defined in eq. (III.18).

In der folgenden Darstellung werden die berechneten Eigenkreisfrequenzen und die Drehkreisfrequenz mit der mittleren Eigenkreisfrequenz ω nach Gleichung (III.18) normiert.



As we observe the system from a moving point of view, the natural angular frequencies depend on the rotary angular frequency. In stable areas we find a superposition of two oscillations with the angular frequencies ω_1 and ω_2. A sensor which is mounted to the rotor would register these two oscillations, when we excite the rotor system e.g. by impact.
In the instable area we have a superposition of an harmonic oscillation of angular frequency ω_1 [11] and an exponential amplification of the displacement amplitude in terms of the relative coordinate system.

Wegen der Sichtweise aus dem bewegten Koordinatensystem sind die Eigenkreisfrequenzen von der Drehkreisfrequenz abhängig. Im stabilen Bereich ergibt sich eine Überlagerung zweier Teilschwingungen mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2. Ein mitrotierender Sensor würde diese beiden Teilschwingungen registrieren, wenn das Rotorsystem beispielsweise durch Stoß angeregt würde.
Im instabilen Bereich überlagert sich eine harmonische Teilschwingung der Kreisfrequenz ω_1[11] mit einem exponentiellen Anwachsen der Auslenkungsamplitude im Relativsystem.

[11] We use the subscript '1' arbitrarily here. One of the four roots of eq. (III.25) will remain purely imaginary and positive under all circumstances. For convenience we call this root ω_1.

Die Angabe des Index '1' erfolgt willkürlich. Eine der vier Nullstellen von Gleichung (III.25) bleibt unter allen Umständen rein imaginär und positiv, diese wird hier der Einfachheit halber mit ω_1 bezeichnet

4 Damping

In the preceding chapters all rotor systems were considered to be undamped. The problem of infinite amplitudes of displacement in cases of resonance was implicitly accepted, as we acted on the assumption that even marginal material damping would attenuate these mathematical singularities.

In the theory of oscillations we tend to believe – sometimes wrongly – that damping is always a helpful and beneficial appliance, as it reliably reduces displacement amplitudes in cases of resonance. Instability due to parameter excitation can be affected opportunely or can be even prohibited.

In rotor dynamics another facet of damping has to be considered, which questions damping as a helpful aooliance. We have to discriminate accurately whether damping takes place at the stationary structure of the bearings or the foundation or whether damping takes place at the rotating structure, for example at the shaft or at the shaft-hub-joint. Damping in the stationary structure is called external damping, the one in the rotating structure is called internal damping. The terms "rotating damping" or "rotating friction" are in use as well.

To keep the complexity on a low level in this chapter we are going to consider only damping forces or moments that are proportional to the velocity. Synonyms are "NEWTON's friction", "viscous damping/friction".

Dämpfung

Bisher wurden alle Rotorsysteme als ungedämpft betrachtet. Das Problem unendlich großer Auslenkungsamplituden in Resonanzfällen wurde stillschweigend in Kauf genommen, da grundsätzlich von einer geeigneten, wenn auch geringen, Materialdämpfung ausgegangen werden kann, die solche mathematischen Singularitäten abmildert.

In der Schwingungslehre kommt gelegentlich die trügerische Gewissheit auf, dass Dämpfung grundsätzlich eine hilfreiche und segensreiche Einrichtung ist, da in Resonanznähe Schwingungsamplituden zuverlässig begrenzt werden können. Auch Instabilitäten aufgrund von Parametererregung werden durch Dämpfung günstig beeinflusst oder gar verhindert.

Im Rahmen der Rotordynamik muss jedoch ein Aspekt der Dämpfung berücksichtigt werden, der mit dieser trügerischen Gewissheit nicht vereinbar ist. Es muss sorgfältig unterschieden werden, ob Dämpfung an der ruhenden Struktur der Lagerung oder an der Rotierenden Struktur der Welle oder Welle-Naben Verbindung stattfindet. Dämpfung, die an ruhenden Teilen der Lagerung oder Fundamentierung wirkt, wird mit äußerer Dämpfung bezeichnet. Wirkt die Dämpfung an rotieren den Teilen, wird sie als innere Dämpfung bezeichnet. Auch die Begriffe „rotierende Dämpfung“ oder „rotierende“ Reibung sind gebräuchlich.

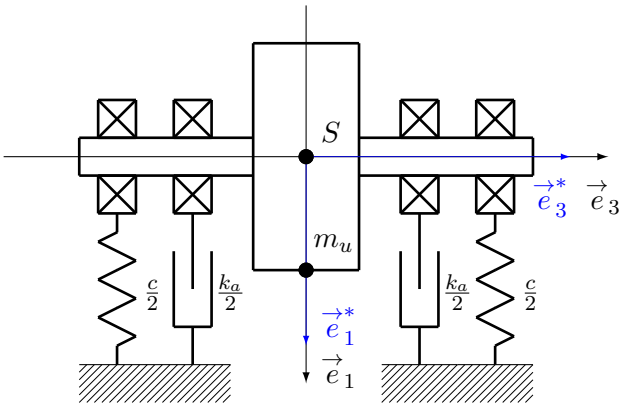
Um den mathematischen Aufwand in Grenzen zu halten, wird in diesem Kapitel ausschließlich von geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskräften und -momenten ausgegangen. Synonyme Bezeichnungen sind NEWTONsche Reibung, viskose Reibung/Dämpfung.

4.1 External Damping

Let us consider a JEFFCOTT rotor with external damping. For the sake of completeness we will show this pretty well known case.

Äußere Dämpfung

Betrachtet sei ein LAVALläufer mit äußerer Dämpfung. Der Vollständigkeit halber wird dieser allgemein bekannte Fall dargestellt.

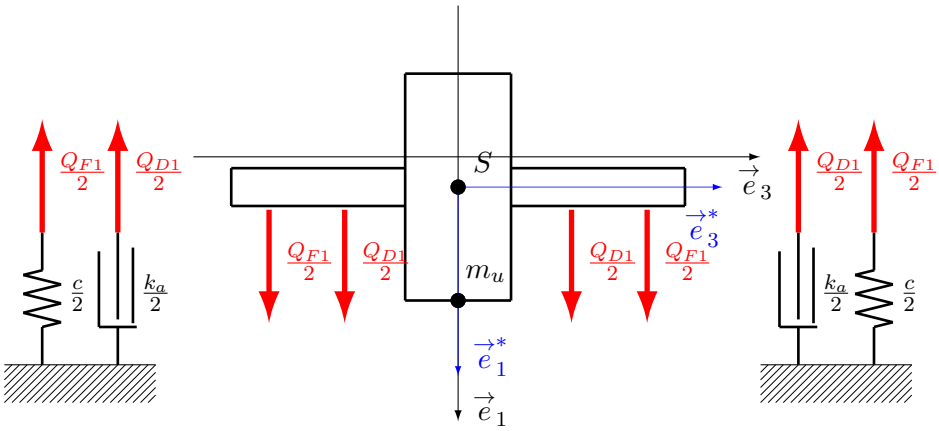


We will remember that due to symmetry or due to adequate guidance there will be no angular displacement according to the cardanic angles.

By cutting free we can determine the forces acting on the rotor system.

Es sei daran erinnert, dass aufgrund der Symmetrie oder aufgrund von geeigneter Führung eine Auslenkung gemäß der kardanischen Winkel nicht möglich ist.

Die auf das Rotorsystem wirkenden Kräfte werden durch Freischneiden bestimmt.



It is

$$F_x = Q_{F1} + Q_{D1}; \qquad F_y = Q_{F2} + Q_{D2}.$$

By using

$$\underline{Q}_F = Q_{F1} + j\,Q_{F2}; \qquad \underline{Q}_D = Q_{D1} + j\,Q_{D2}$$

we find

Es gilt:

Mit

gilt ferner

$$\underline{F} = \underline{Q}_F + \underline{Q}_D.$$

We find HOOK's Laws and the damping laws as

Die isotropen Feder- und Dämpfungsgesetze lauten:

$$Q_{F1} = -c_a\, x_{OR}, \quad Q_{F2} = -c_a\, y_{OR} \quad \text{and / und} \quad Q_{D1} = -k_a\, \dot{x}_{OR}, \quad Q_{D2} = -k_a\, \dot{y}_{OR}.$$

By using

Mit

$$\underline{z} = x_{OR} + j\, y_{OR}, \qquad \dot{\underline{z}} = \dot{x}_{OR} + j\, \dot{y}_{OR}$$

we can write HOOKE's law and the damping law in complex form:

können die Feder- und Dämpfungsgesetzte komplex zusammengefasst werden:

$$\underline{F} = -c_a\, \underline{z} - k_a\, \dot{\underline{z}}.$$

According to eq. (II.8) the equation of motion of the externally damped JEFFCOTT rotor is

Entsprechend Gleichung (II.8) lautet die Bewegungsgleichung des von außen gedämpften LAVALläufers

$$\ddot{\underline{z}} + \frac{k_a}{m}\, \dot{\underline{z}} + \frac{c_a}{m}\, \underline{z} = \frac{m_u\, r_u^*}{m}\, \Omega^2\, e^{j(\Omega\, t + \varphi^*)}. \tag{IV.1}$$

In order to write the solution in a more concise way, we define some abbreviations:

Um die Lösung dieser Bewegungsgleichung besonders übersichtlich anschreiben zu können, werden einige Umbenennungen und Abkürzungen definiert:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{c_a}{m}, & e^* &= \frac{m_u\, r_u^*}{m}, \\ D_a &= \frac{k_a}{2\, m}, & \vartheta_a &= \frac{k_a}{2\, m\, \omega_0}. \end{aligned} \tag{IV.2}$$

It is

Hierbei gilt:

ω_0 :	natural angular frequency of the undamped system,	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems,
e^* :	excentricity due to unbalance,	Exzentrizität aufgrund von Unwucht,
k_a :	damper constant due to external damping,	Dämpfungskonstante aufgrund äußerer Dämpfung,
D_a :	damping factor due to external damping,	Dämpfungsfaktor aufgrund äußerer Dämpfung,
ϑ_a :	damping ratio due to external damping.	LEHRsches Dämpfungsmaß aufgrund äußerer Dämpfung.

Using these abbreviations the equation of motion is

Mit diesen Definitionen lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\underline{z}} + 2\,\vartheta_a\,\omega_0\,\dot{\underline{z}} + \omega_0^2\,\underline{z} = e^*\,\Omega^2\,e^{j(\Omega\,t+\varphi^*)}. \tag{IV.3}$$

Homogeneous Solution

Homogene Lösung

Firstly we seek the homogeneous solution for the case of slight damping ($\vartheta_a < 1$). For this purpose we choose an approach like

Zunächst wird die homogene Lösung für den Fall der geringen Dämpfung ($\vartheta_a < 1$) gesucht. Hierzu wird folgender Ansatz gewählt:

$$\underline{z} = \underline{z}_0\,e^{j\,\lambda\,t}. \tag{IV.4}$$

The characteristic polynome is

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 - \lambda\,2\,j\,\omega_0\,\vartheta_a - \omega_0^2 = 0$$

and its roots are

und dessen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = j\,\omega_0\,\vartheta_a \pm \omega_0\,\sqrt{1-\vartheta_a^2}.$$

The term $\omega_0\,\sqrt{1-\vartheta_a^2}$ will be abbreviated by ω_1. It is called the natural angular frequency of the damped system. There is hardly any difference between ω_0 and ω_1 if we consider slight damping.

Der Term $\omega_0\,\sqrt{1-\vartheta_a^2}$ wird künftig mit ω_1, der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems bezeichnet. Bei den hier betrachteten geringen Dämpfungen unterscheiden sich ω_0 und ω_1 kaum voneinander.

By applying these roots on the approach we find the homogeneous solution as

Werden diese Nullstellen in den Ansatz eingesetzt, so ergibt sich die homogene Lösung zu

$$\underline{z} = e^{-\omega_0\,\vartheta_a\,t}\cdot\underline{z}_0\,e^{\pm j\,\omega_1\,t}. \tag{IV.5}$$

Particular Solution

Partikuläre Lösung

Now we choose a right-hand side approach like

Es wird ein Ansatz nach Art der rechten Seite gewählt

$$\underline{z} = \hat{\underline{z}}\,e^{j(\Omega\,t+\varphi^*)}. \tag{IV.6}$$

By applying this approach on the equation of motion (IV.3) we find

Ein Einsetzen in die Bewegungsgleichung (IV.3) ergibt:

$$-\Omega^2\,\hat{\underline{z}} + 2\,j\,\vartheta_a\,\omega_0\,\Omega\,\hat{\underline{z}} + \omega_0^2\,\hat{\underline{z}} = e^*\,\Omega^2.$$

The complex amplitude of oscillation of the particular solution $\underline{\hat{z}}$ can now be obtained. By defining the dimensionless frequency of rotation $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ we get

Die komplexe Schwingungsamplitude der partikulären Lösung $\underline{\hat{z}}$ kann nunmehr bestimmt werden. Mit der Definition einer dimensionslosen Drehfrequenz $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ ergibt sie sich zu

$$\underline{\hat{z}} = \frac{e^* \, \eta^2}{1 - \eta^2 + 2\, j\, \vartheta_a \, \eta}.$$

Mostly we are interested in the magnitude of the complex amplitude $\hat{z} = |\underline{\hat{z}}|$. It is convenient to obtain a real denominator by multiplying both the numerator and the denominator by the conjugate of the denominator

Häufig ist jedoch der Betrag der komplexen Schwingungsamplitude $\hat{z} = |\underline{\hat{z}}|$ von Interesse. Es ist günstig, durch konjugiert komplexes Erweitern zunächst den Nenner reell zu gestalten

$$\underline{\hat{z}} = \frac{e^* \, \eta^2 \, (1 - \eta^2 - j\, 2\, \vartheta_a \, \eta)}{(1 - \eta^2)^2 + 4\, \vartheta_a^2 \, \eta^2.}$$

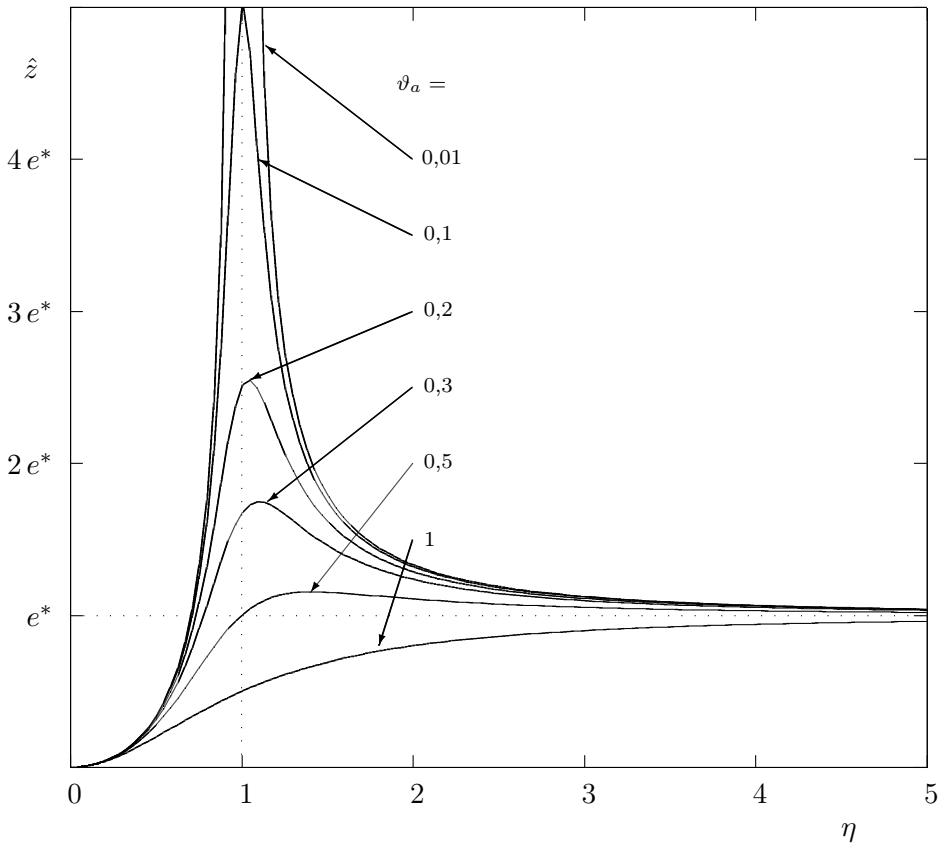
Now we can easily calculate the magnitude. We have

Anschließend kann der Betrag einfach berechnet werden. Dies führt zu

$$\hat{z} = \frac{e^* \, \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\, \vartheta_a^2 \, \eta^2}}. \tag{IV.7}$$

We can show the magnitude of the displacement amplitude of a damped JEFFCOTT rotor for some damping ratios ϑ_a

Mit dem LEHRschen Dämpfungsmaß ϑ_a als Parameter stellt sich der Betrag der Auslenkungsamplitude eines gedämpften LAVALläufers wie folgt dar:



The angle between the position of the unbalance and the direction of the displacement $\underline{\hat{z}}$ can be obtained if we describe $\underline{\hat{z}}$ in the polar form

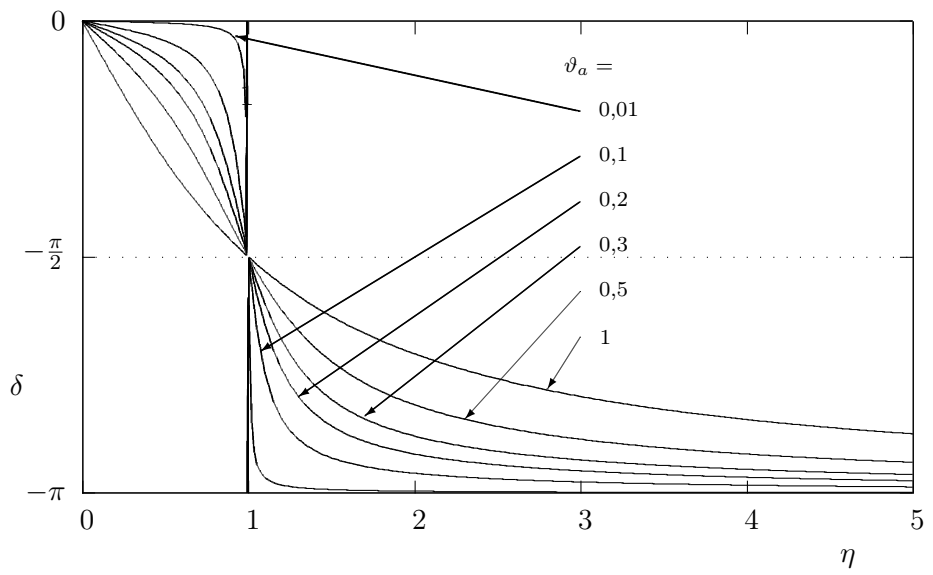
Der Winkel zwischen der Lage der Unwucht und der Auslenkungsrichtung $\underline{\hat{z}}$ kann ermittelt werden, wenn $\underline{\hat{z}}$ in Exponentialform dargestellt wird

$$\underline{\hat{z}} = Re + j\,Im = \hat{z}\,e^{j\,\delta}.$$

Consider: This more formal approach to the calculation of the phase angle δ leads to consistently negative results for this angle and therefore to a slightly different representation.

Hinweis: Diese formale Herangehensweise an die Berechnung des Phasenwinkels δ führt zu durchweg negativen Werten für diese Winkel und somit zu einer vom Gewohnten abweichenden Darstellung.

$$\delta = \arctan \frac{-2\,\vartheta_a\,\eta}{1-\eta^2}$$



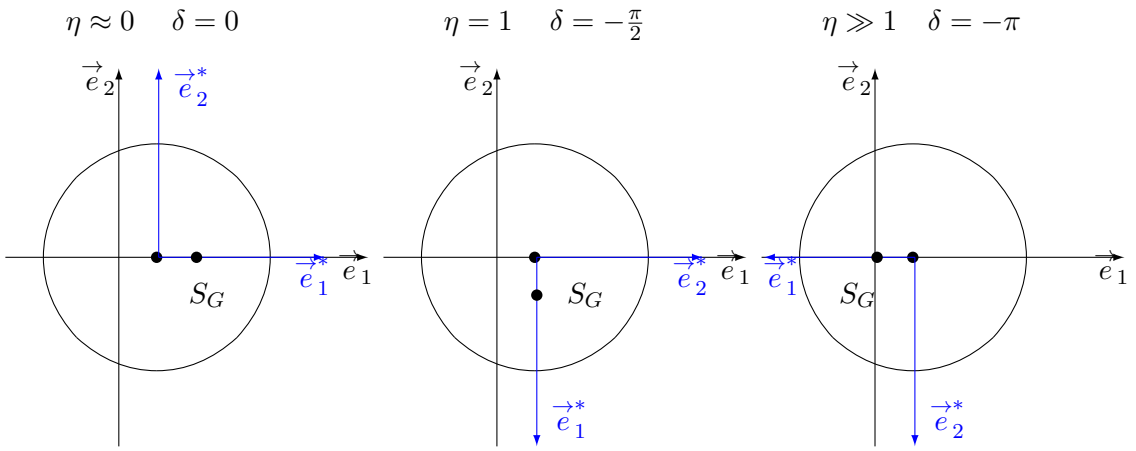
We obtain the particular solution as

Die partikuläre Lösung lautet dann

$$\underline{z} = \hat{z}\,e^{j\,(\Omega\,t+\varphi^*+\delta)}. \tag{IV.8}$$

At low speed ($\eta \approx 0$) the common centre of gravity is located outside. In a case of resonance ($\eta = 0$) we have a phase angle of $-\frac{\pi}{2}$. At high supercritical speed ($\eta >> 1$) the common centre of gravity is located between the centre point of the Rotor R and the coordinate axis $\vec{e}_3$. At highest speed the rotor rotates around its common centre of gravity, which is nearly motionless.

Bei niedrigen Drehfrequenzen ($\eta \approx 0$) liegt der gemeinsame Schwerpunkt S_G außen. Im Resonanzfall ($\eta = 0$) stellt sich eine Phasenlage von $-\frac{\pi}{2}$ ein. Bei hohen Drehfrequenzen ($\eta >> 1$) liegt der gemeinsame Schwerpunkt zwischen Rotormittelpunkt R und der Koordinatenachse $\vec{e}_3$. Bei höchsten Drehzahlen führt der Rotor seine Bewegung um den nahezu stillstehenden gemeinsamen Schwerpunkt aus.

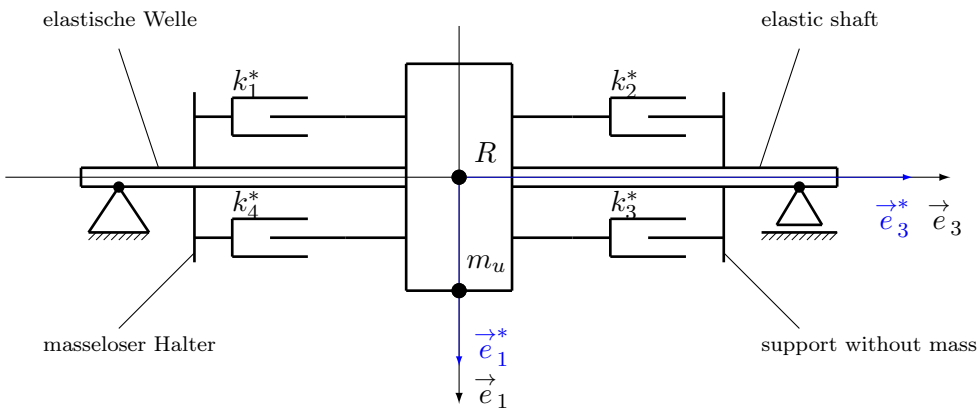


4.2 Internal Damping

Innere Dämpfung

Again we consider a JEFFCOOT rotor but now it is equipped with an elastic shaft. The material of the shaft has distinctive damping properties, which may be pointed up by four rotating dampers in one plane. A shaft made of fibre composite may have such a property. External damping does not exist in the following consideration.

Betrachtet sei erneut ein LAVALläufer, diesmal mit einer elastischen Welle. Das Wellenmaterial habe ausgeprägte Dämpfungseigenschaften, die hier mit vier diskreten Dämpfern in einer Ebene verdeutlicht werden sollen. Eine Welle aus Faserverbundwerkstoff mag diese Eigenschaften aufweisen. Äußere Dämpfung sei nicht vorhanden.

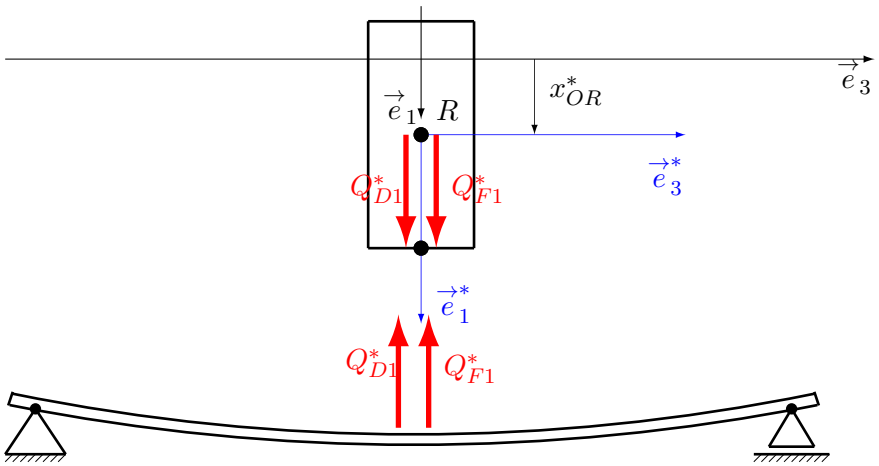


We will abstain from calculating a resulting inner damping constant k_i^* out of the four discrete dampers because this model depends on too many and quite unnecessary geometrical parameters. Analogically to the spring constant $c^* = \frac{48\,E\,I}{l^3}$ we presume an internal damping constant k_i^*.

Von einer Berechnung einer resultierenden inneren Dämpfungskonstanten k_i^* aus den vier diskreten Dämpfern wird abgesehen, da die Modellanordnung unnötig von Geometrieparametern abhängt. Es wird analog zur Federsteifigkeit $c^* = \frac{48\,E\,I}{l^3}$ eine innere Dämpfungskonstante k_i^* angenommen.

Spring and damper forces result from the free body diagram.

Feder- und Dämpfungskräfte ergeben sich aus dem Schnittbild.



We find HOOK's Laws and the damping laws as

Die Feder- und Dämpfungsgesetze lauten:

$$Q^*_{F1} = -c^*\, x^*_{OR}, \quad Q^*_{F2} = -c^*\, y^*_{OR} \quad \text{and / und} \quad Q^*_{D1} = -k^*_i\, (x^*_{OR})^\bullet\,, \quad Q^*_{D2} = -k^*_i\, (y^*_{OR})^\bullet\,.$$

The vector of all forces acting on the rotor written in terms of the relative coordinate system is

Der Vektor der am Rotor wirkenden Kräfte, angegeben im Relativsystem lautet dann

$$\vec{F}^{\,*} = \begin{pmatrix} Q^*_{D1} + Q^*_{F1} \\ Q^*_{D2} + Q^*_{F2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^*_i\, (x^*_{OR})^\bullet - c^*\, x^*_{OR} \\ -k^*_i\, (y^*_{OR})^\bullet - c^*\, y^*_{OR} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.9}$$

Equations of Motion

Bewegungsgleichungen

Following the derivation of the equations of motion for JEFFCOTTrotors with anisotropic shafts we use again the viewpoint of the relative coordinate system.

In Anlehnung an die Herleitung der Bewegungsgleichungen für den LAVALläufer mit anisotroper Welle erfolgt auch hier die Betrachtung im Relativsystem.

NEWTON's Second Law of Motion in Translation according to eq.(I.26) can be reduced to

Der Schwerpunktsatz für Kräfte im Relativsystem nach Gleichung (I.26) reduziert sich zu

$$\vec{F}^{\,*} = \underline{\underline{Q}}\, m\, \dot{\vec{v}}_{OR} + m\, \left(\vec{w}^{\,*} \times \left(\vec{w}^{\,*} \times \vec{r}^{\,*}_{RS}\right)\right), \tag{IV.10}$$

because again we find that $\left(\vec{r}^{\,*}_{RS}\right)^\bullet = 0$, $\left(\vec{r}^{\,*}_{RS}\right)^{\bullet\bullet} = 0$ and $(\vec{w}^{\,*})^\bullet = 0$. The latter is obvious when we consider that the cardanic angles α and β are constantly zero.

da erneut gilt $\left(\vec{r}^{\,*}_{RS}\right)^\bullet = 0$, $\left(\vec{r}^{\,*}_{RS}\right)^{\bullet\bullet} = 0$ und $(\vec{w}^{\,*})^\bullet = 0$, letzteres, da die kardanischen Winkel α und β den konstanten Wert 0 haben.

The quantities that occur in eq. (IV.10) are

Die in Gleichung (IV.10) auftauchenden Größen sind

$$\vec{w}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_{OR} = \begin{pmatrix} x_{OR} \\ y_{OR} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}^*_{RS} = \frac{m_u\, r^*_u}{m} \begin{pmatrix} \cos\varphi^* \\ \sin\varphi^* \\ 0 \end{pmatrix} = e^* \begin{pmatrix} \cos\varphi^* \\ \sin\varphi^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\, t & \sin\Omega\, t & 0 \\ -\sin\Omega\, t & \cos\Omega\, t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{Q}}^* = \begin{pmatrix} \cos\Omega\, t & -\sin\Omega\, t & 0 \\ \sin\Omega\, t & \cos\Omega\, t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

The first term of eq. (IV.10) has to be described by quantities, written in terms of the relative coordinate system. It can be proved that

Der erste Term der Gleichung (IV.10) soll auch in diesem Fall mit Größen des Relativsystems dargestellt werden, ein etwas längerer Rechenweg zeigt:

$$m\, \underline{\underline{Q}}\, \dot{\vec{v}}_{OR} = m\, \underline{\underline{Q}}\, \left(\underline{\underline{Q}}^*\, \vec{r}^*_{OR}\right)^{\bullet\bullet} = m \begin{pmatrix} (x^*_{OR})^{\bullet\bullet} - 2\,\Omega\, (y^*_{OR})^{\bullet} - \Omega^2\, x^*_{OR} \\ (y^*_{OR})^{\bullet\bullet} + 2\,\Omega\, (x^*_{OR})^{\bullet} - \Omega^2\, y^*_{OR} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The second term of eq.(IV.10) can be found as

Der zweite Term der Gleichung (IV.10) ergibt sich zu

$$m\, \left(\vec{w}^* \times \left(\vec{w}^* \times \vec{r}^*_{RS}\right)\right) = m \begin{pmatrix} -\Omega^2\, e^*\, \cos\varphi^* \\ -\Omega^2\, e^*\, \sin\varphi^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hence the equations of motion are

Somit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} (x^*_{OR})^{\bullet\bullet} + \frac{k^*_i}{m}\, (x^*_{OR})^{\bullet} - 2\,\Omega\, (y^*_{OR})^{\bullet} + \frac{c^*}{m}\, x^*_{OR} - \Omega^2\, x^*_{OR} &= \Omega^2\, e^*\, \cos\varphi^*, \\ (y^*_{OR})^{\bullet\bullet} + \frac{k^*_i}{m}\, (y^*_{OR})^{\bullet} + 2\,\Omega\, (x^*_{OR})^{\bullet} + \frac{c^*}{m}\, y^*_{OR} - \Omega^2\, y^*_{OR} &= \Omega^2\, e^*\, \sin\varphi^*. \end{aligned} \tag{IV.11}$$

Using already known definitions $\frac{k^*_i}{m} = 2\, D^*_i$ and $\frac{c^*}{m} = \omega_0^2$ we can write the equation of motion in complex notation like

Mit den bekannten Vereinbarungen $\frac{k^*_i}{m} = 2\, D^*_i$ und $\frac{c^*}{m} = \omega_0^2$ ergibt sich eine Bewegungsgleichung in komplexer Schreibweise:

$$(\underline{z}^*)^{\bullet\bullet} + 2\, (D^*_i + j\,\Omega)\, (\underline{z}^*)^{\bullet} + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\, \underline{z}^* = \Omega\, e^*\, e^{\varphi^*}. \tag{IV.12}$$

We use an harmonic approach $\underline{z}^* = \hat{\underline{z}}\, e^{\lambda\, t}$ on the homogeneous differential equation to find the homogeneous solution. This leads to the characteristic polynom

Zur Ermittlung der homogenen Lösung wird der Ansatz $\underline{z}^* = \hat{\underline{z}}\, e^{\lambda\, t}$ in die homogene Differenzialgleichung eingesetzt. Dies führt zu dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^2 + \lambda\, 2\, (D^*_i + j\,\Omega) + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) = 0$$

and to the roots

und den Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = -\,(D^*_i + j\,\Omega) \pm \sqrt{D^{*2}_i + 2\, j\, D^*_i\, \Omega - \omega_0^2}.$$

It is not particularly easy to solve the square root. Hence we will use certain simplifications and approximated solutions:

1. If we consider low damping we find that the term D_i^{*2} is small in comparison to the other terms. Hence we presume $D_i^{*2} \approx 0$.
2. For the remaining square root we use the approximated solution $\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2\,a}$.

Now we have

Der Wurzelausdruck bereitet für die weitere Vorgehensweise gewisse Schwierigkeiten, weshalb folgende Vereinfachungen und Näherungslösungen angewendet werden:

1. Bei der betrachteten geringen Dämpfung ist der Term D_i^{*2} klein gegenüber den anderen Termen. Vereinfachend wird angenommen $D_i^{*2} \approx 0$.
2. Für die verbleibende Wurzel wird die Näherungslösung $\sqrt{a^2+x} \approx a + \frac{x}{2\,a}$ verwendet.

Dies führt zu

$$\lambda_{1,2} = -D_i^* - j\,\Omega \pm \left(j\,\omega_0 + D_i^* \frac{\Omega}{\omega_0} \right).$$

With $\vartheta_i^* = \frac{D_i^*}{\omega_0}$ we find the two roots as

Mit $\vartheta_i^* = \frac{D_i^*}{\omega_0}$ ergeben sich die beiden Nullstellen zu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \vartheta_i^* \left(\quad \Omega - \omega_0 \right) + j \left(\quad \omega_0 - \Omega \right), \\ \lambda_2 &= \vartheta_i^* \left(-\Omega - \omega_0 \right) + j \left(-\omega_0 - \Omega \right). \end{aligned} \tag{IV.13}$$

The homogeneous solution of the equation of motion is hence

Die homogene Lösung der Bewegungsgleichung lautet dann

$$\underline{z}^* = \hat{\underline{z}}_1\, e^{\lambda_1\, t} + \hat{\underline{z}}_2\, e^{\lambda_2\, t}. \tag{IV.14}$$

If $\Omega > \omega_0$ the real part of λ_1 gets positive. This leads to exponentially increasing displacement amplitudes. Rotor systems that feature exclusively internal damping cannot operate at supercritical speeds. Internal damping is destabilizing at supercritical speeds!

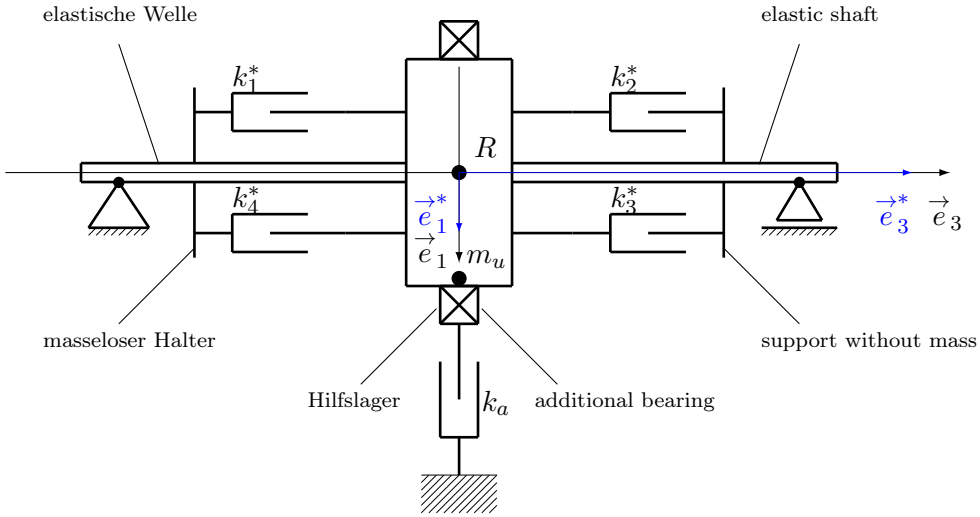
Wenn $\Omega > \omega_0$ wird, ist der Realteil von λ_1 positiv. Dies führt zu exponentiell anwachsenden Schwingungsamplituden. Rotorsysteme, die ausschließlich innere Dämpfung aufweisen, können demzufolge nicht überkritisch betrieben werden. Innere Dämpfung wirkt im überkritischen Drehzahlbereich destabilisierend!

4.3 Internal and External Damping

Innere und Äußere Dämpfung

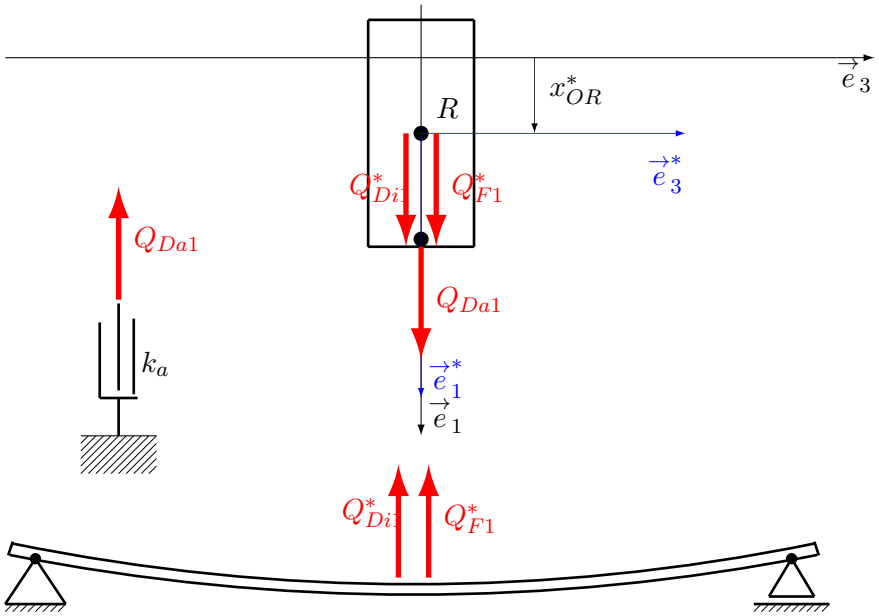
To describe the combination of internal and external damping more easily we apply the external damping in a different way than in Chapter 4.1. There is an additional bearing directly on the rotor the external damping k_a is acting on.

Um das gleichzeitige Vorhandensein von innerer und äußerer Dämpfung möglichst einfach darstellen zu können, wird die äußere Dämpfung k_a abweichend von Kap. 4.1 direkt am Rotor über ein zusätzliches Wälzlager (Hilfslager) angebracht.



The free body diagram shows the forces acting on the rotor.

Das Schnittbild zeigt die am Rotor angreifenden Kräfte



Again we have

Erneut gilt

$$\vec{w}=\vec{w}^{\,*}=\begin{pmatrix}0\\0\\\Omega\end{pmatrix},\qquad \vec{r}_{OR}=\begin{pmatrix}x_{OR}\\y_{OR}\\0\end{pmatrix},\qquad \vec{r}^{\,*}_{RS}=\frac{m_u\,r_u^*}{m}\begin{pmatrix}\cos\varphi^*\\\sin\varphi^*\\0\end{pmatrix}=e^*\begin{pmatrix}\cos\varphi^*\\\sin\varphi^*\\0\end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{Q}}=\begin{pmatrix}\cos\Omega t & \sin\Omega t & 0\\-\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \underline{\underline{Q}}^*=\begin{pmatrix}\cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0\\\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

As shown in chapter 4.2, eq.(IV.10), we can derive all forces in terms of the relative coordinate system acting on the rotor by using NEWTON's Second Law of Motion in Translation.

Wie in Kap. 4.2 können mit Hilfe des Schwerpunktsatzes die Krafte am Rotor im Relativsystem entsprechend Gleichung (IV.10) dargestellt werden:

$$\vec{F}^* = \underline{\underline{Q}}\, m\, \dot{\vec{v}}_{OR} + m\left(\vec{w}^* \times \left(\vec{w}^* \times \vec{r}^*_{RS}\right)\right).$$

As we have forces in terms of the absolute system as well we have to provide an appropriate equation as well.

Da im nun betrachteten Fall auch Kräfte im Absolutsystem angegeben werden, ist die entsprechende Gleichung für solche vorzuhalten:

$$\vec{F} = m\, \dot{\vec{v}}_{OR} + m\, \underline{\underline{Q}}^*\left(\vec{w}^* \times \left(\vec{w}^* \times \vec{r}^*_{RS}\right)\right). \tag{IV.15}$$

HOOK's Laws are

Die Federgesetze lauten

$$Q^*_{F1} = -c^*\, x^*_{OR}, \qquad Q^*_{F2} = -c^*\, y^*_{OR}.$$

The internal damping can be described as

Die innere Dämpfung wird beschrieben durch

$$Q^*_{Di1} = -k^*_i\, (x^*_{OR})^\bullet, \qquad Q^*_{Di2} = -k^*_i\, (y^*_{OR})^\bullet.$$

And for the external damping we find

Für die äußere Dämpfung gilt

$$Q_{Da1} = -k_a\, \dot{x}_{OR}, \qquad Q_{Da2} = -k_a\, \dot{y}_{OR}.$$

We find forces both in terms of the relative system and in terms of the absolute system. Hence we cannot avoid to consider all forces consistently in one coordinate system. Equations of motion for quantities in terms of the absolute system describe the natural viewpoint of a stationary observer, therefore we will transform all quantities given in terms of the relative coordinate system into the absolute. Let us write HOOKE's Laws and all damping laws in vectorial form at first.

Da sowohl Kräfte im Relativsystem als auch im Absolutsystem angegeben werden, ist es unvermeidlich, dass alle Kräfte in einem einheitlichen Koordinatenseystem betrachtet werden müssen. Da Bewegungsgleichungen für Größen des Inertialsystems der natürlichen Betrachtungsweise eines ruhenden Beobachters entsprechen, werden alle Relativgrößen ins Absolutsystem transformiert. Hierzu werden die Feder- und Dämpfungsgesetze zunächst vektoriell zusammengefasst.

$$\vec{F}^*_F = \begin{pmatrix} Q^*_{F1} \\ Q^*_{F2} \\ 0 \end{pmatrix} = -c^* \begin{pmatrix} x^*_{OR} \\ y^*_{OR} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}^*_{Di} = \begin{pmatrix} Q^*_{Di1} \\ Q^*_{Di2} \\ 0 \end{pmatrix} = -k^*_i \begin{pmatrix} (x^*_{OR})^\bullet \\ (y^*_{OR})^\bullet \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The transformation rules $\vec{F}_F = \underline{\underline{Q}}^*\ \vec{F}^*_F$ and $\vec{F}_{Di} = \underline{\underline{Q}}^*\ \vec{F}^*_{Di}$ lead to

Die Transformationen $\vec{F}_F = \underline{\underline{Q}}^*\ \vec{F}^*_F$ und $\vec{F}_{Di} = \underline{\underline{Q}}^*\ \vec{F}^*_{Di}$ ergeben

$$\vec{F}_F = -c^* \begin{pmatrix} x^*_{OR} \cos\Omega t - y^*_{OR} \sin\Omega t \\ x^*_{OR} \sin\Omega t + y^*_{OR} \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{IV.16}$$

$$\vec{F}_{Di} = -k^*_i \begin{pmatrix} (x^*_{OR})^\bullet \cos\Omega t - (y^*_{OR})^\bullet \sin\Omega t \\ (x^*_{OR})^\bullet \sin\Omega t + (y^*_{OR})^\bullet \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.17}$$

The forces due to external damping remain unmodified

Für die Kräfte aufgrund äußerer Dämpfung gilt unverändert

$$\vec{F}_{Da} = -k_a \begin{pmatrix} \dot{x}_{OR} \\ \dot{y}_{OR} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.18}$$

All forces are now in terms of the absolute coordinate system. However the quantities x^*_{OR}, y^*_{OR}, $(x^*_{OR})^\bullet$, $(y^*_{OR})^\bullet$ are still to be transformed.

Nachdem nunmehr alle Kräfte im Inertialsystem notiert sind, müssen auch die Größen x^*_{OR}, y^*_{OR}, $(x^*_{OR})^\bullet$, $(y^*_{OR})^\bullet$ transformiert werden. Es gilt:

$$\vec{r}^{\,*}_{OR} = \begin{pmatrix} x^*_{OR} \\ y^*_{OR} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{OR} \cos\Omega t + y_{OR} \sin\Omega t \\ -x_{OR} \sin\Omega t + y_{OR} \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.19}$$

By applying this finding on eq. (IV.16) we find

Wird diese Vorschrift auf Gleichung (IV.16) angewandt, ergibt sich

$$\vec{F}_F = -c^* \begin{pmatrix} x_{OR} \cos^2\Omega t + y_{OR} \sin\Omega t \cos\Omega t + x_{OR} \sin^2\Omega t - y_{OR} \sin\Omega t \cos\Omega t \\ x_{OR} \sin\Omega t \cos\Omega t + y_{OR} \sin^2\Omega t - x_{OR} \sin\Omega t \cos\Omega t + y_{OR} \cos^2\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fortunately this can be simplified to

Erfreulicherweise kann dies leicht vereinfacht werden zu

$$\vec{F}_F = -c^* \begin{pmatrix} x_{OR} \\ y_{OR} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.20}$$

In doing this we prove that there is no distinction between "internal" and "external" springs.

Mit diesem Rechengang ist nachgewiesen, dass kein Unterschied zwischen „innerer“ und „äußerer Federung“ besteht!

Now we have to replace the quantities $(x^*_{OR})^\bullet$ and $(y^*_{OR})^\bullet$ of eq. (IV.17) by $\dot{x}_{OR}$ und $\dot{y}_{OR}$. Hence we have to derivate eq. (IV.19) with respect to time.

Nun müssen aus Gleichung (IV.17) die Größen $(x^*_{OR})^\bullet$ und $(y^*_{OR})^\bullet$ durch $\dot{x}_{OR}$ und $\dot{y}_{OR}$ erstezt werden. Hierzu muss Gleichung (IV.19) nach der Zeit abgeleitet werden.

$$\left(\vec{r}^{\,*}_{OR}\right)^\bullet = \begin{pmatrix} (x^*_{OR})^\bullet \\ (y^*_{OR})^\bullet \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{OR} \cos\Omega t - \Omega x_{OR} \sin\Omega t + \dot{y}_{OR} \sin\Omega t + \Omega y_{OR} \cos\Omega t \\ -\dot{x}_{OR} \sin\Omega t - \Omega x_{OR} \cos\Omega t + \dot{y}_{OR} \cos\Omega t - \Omega y_{OR} \sin\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

If we apply this on eq. (IV.17) we find a rather voluminous expression in the first instance. But again all mixed Sinus- and Cosinus- terms compensate each other, whilst all squared trigonometric functions add up neatly to 1. Finally we have

Wenn dieser Zusammenhang auf Gleichung (IV.17) angewandt wird, entsteht zunächst ein recht umfangreicher Ausdruck. Erneut heben sich aber alle gemischten Sinus- und Cosinusterme gegeneinander auf, während die quadratischen Winkelfunktionen sich elegant zu 1 addieren. Die Zusammenfassung lautet

$$\vec{F}_{Di} = -k_i^* \begin{pmatrix} \dot{x}_{OR} + \Omega\, y_{OR} \\ \dot{y}_{OR} - \Omega\, x_{OR} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.21}$$

The sum of all forces due to springs and dampers in terms of the absolute system are

Die Summe aller Feder- und Dämpfungskräfte, angegeben im Inertialsystem lautet nun

$$\vec{F} = -c^* \begin{pmatrix} x_{OR} \\ y_{OR} \\ 0 \end{pmatrix} - k_i^* \begin{pmatrix} \dot{x}_{OR} + \Omega\, y_{OR} \\ \dot{y}_{OR} - \Omega\, x_{OR} \\ 0 \end{pmatrix} - k_a \begin{pmatrix} \dot{x}_{OR} \\ \dot{y}_{OR} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.22}$$

This vector is to be equated with the right hand side of Newton's Second Law as allready known in eq. (IV.15). After calculating the two vectorial products and applying the addition and subtraction theoreme we have

Dieser Kraftvektor ist gleichzusetzen mit der rechten Seite des Schwerpunktsatzes, wie er als Gleichung (IV.15) schon bekannt ist. Nach dem Ausmultiplizieren der beiden Kreuzprodukte und der Anwendung von Additionstheoremen lautet der Schwerpunktsatz für den vorliegenden Fall

$$\vec{F} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}_{OR} \\ \ddot{y}_{OR} \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -\Omega^2\, e^* \cos(\Omega\, t + \varphi^*) \\ -\Omega^2\, e^* \sin(\Omega\, t + \varphi^*) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.23}$$

We find the equation of motion by eqating the equations (IV.22) and (IV.23).

Das Gleichsetzen von Gleichung (IV.22) und Gleichung (IV.23) liefert die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{OR} + \dot{x}_{OR} \left(\frac{k_i^*}{m} + \frac{k_a}{m}\right) + y_{OR}\, \Omega\, \frac{k_i^*}{m} + x_{OR}\, \frac{c^*}{m} &= e^*\, \Omega^2 \cos(\Omega\, t + \varphi^*) \\ \ddot{y}_{OR} + \dot{y}_{OR} \left(\frac{k_i^*}{m} + \frac{k_a}{m}\right) - x_{OR}\, \Omega\, \frac{k_i^*}{m} + y_{OR}\, \frac{c^*}{m} &= e^*\, \Omega^2 \sin(\Omega\, t + \varphi^*) \end{aligned} \tag{IV.24}$$

In complex notation and with the usual renaming the equation of motion is

In komplexer Schreibweise und mit den gewohnten Umbenennungen lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\underline{z}}_{OR} + 2\,(D_i^* + D_a)\, \dot{\underline{z}}_{OR} - 2\, j\, \Omega\, D_i^*\, \underline{z}_{OR} + \omega_0^2\, \underline{z}_{OR} = e^*\, \Omega^2\, \mathrm{e}^{j\,(\Omega\, t + \varphi^*)}. \tag{IV.25}$$

To find a homogeneous solution we apply the harmonic approach $\underline{z}_{OR} = \hat{z}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ on the homogeneous differential equation. The characteristic polynome is

Zur Ermittlung der homogenen Lösung wird der harmonische Ansatz $\underline{z}_{OR} = \hat{z}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ in die homogene Differentialgleichung eingesetzt. Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + 2\,\lambda\,(D_i^* + D_a) + \omega_0^2 - 2\,j\,\Omega\,D_i^* = 0.$$

The roots can be found as

Die Nullstellen berechnen sich zu

$$\lambda_{1,2} = -D_i^* - D_a \pm \sqrt{(D_i^* + D_a)^2 - \omega_0^2 + 2\,j\,\Omega\,D_i^*}.$$

Again we have to simplify. If we have minor internal and external damping the term $(D_i^* + D_a)^2$ of the square root can be neglected. On the remaining square root we apply the known approximate solution

Erneut muss vereinfacht werden. Bei geringer innerer und äußerer Dämpfung wird der Term $(D_i^* + D_a)^2$ unter der Wurzel vernachlässigt. Für die verbleibende Wurzel wird die bekannte Näherungslösung angewandt. Die Nullstellen lauten dann

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \quad j\,\omega_0 - D_a - D_i^*\left(1 + \frac{\Omega}{\omega_0}\right),\\ \lambda_2 &= -j\,\omega_0 - D_a - D_i^*\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_0}\right).\end{aligned}$$

When we use the damping ratio $\vartheta_i^* = \frac{D_i^*}{\omega_0}$ and $\vartheta_a = \frac{D_a}{\omega_0}$ the roots are

Mit den LEHRschen Dämpfungsmaßen $\vartheta_i^* = \frac{D_i^*}{\omega_0}$ und $\vartheta_a = \frac{D_a}{\omega_0}$ lauten sie

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \quad j\,\omega_0 - \omega_0\,\vartheta_a - \vartheta_i^*\,(\omega_0 + \Omega),\\ \lambda_2 &= -j\,\omega_0 - \omega_0\,\vartheta_a - \vartheta_i^*\,(\omega_0 - \Omega),\end{aligned}$$

Both roots have to be inserted into the homogeneous solution of eq. (IV.25)

Diese beiden Nullstellen sind in die homogene Lösung der Bewegungsgleichung (IV.25) einzusetzen

$$\underline{z} = \hat{z}_1\,\mathrm{e}^{\,\lambda_1 t} + \hat{z}_2\,\mathrm{e}^{\,\lambda_2 t}.$$

Again the algebraic sign of the real parts of λ_1 and λ_2 decides whether the system is stable or not. Negative real parts cause a reduction of the amplitude of oscillation, as we expect when damping is involved. This is the case for λ_1 under all circumstances. However, the real part of λ_2 can become positive. As a result, the amplitude of oscillation increases exponentially, which leads unavoidably to destruction. To avoid the we must keep

Erneut ist die Vorzeichenlage der Realteile von λ_1 und λ_2 entscheidend für das Stabilitätsverhalten. Negative Realteile führen zur Verringerung der Schwingungsamplitude, so, wie dies von dem Vorhandensein von Dämpfung üblicherweise erwartet wird. Für λ_1 trifft dies unter allen Umständen zu. Der Realteil von λ_2 kann jedoch positiv werden. Die Folge sind exponentiell anwachsende Auslenkungsamplituden, die zwangsläufig zu einer Zerstörung des Rotorsystems führten. Um dies zu verhindern muss gelten

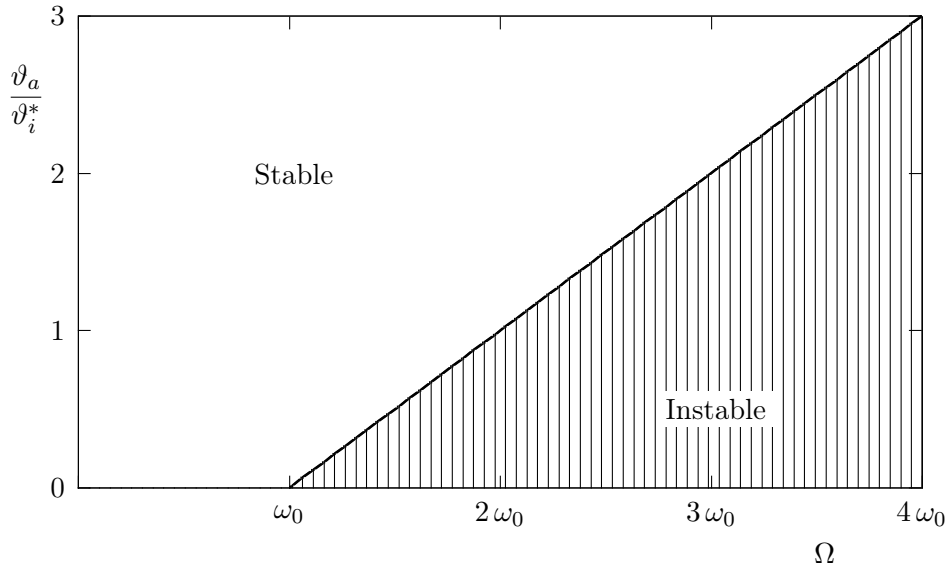
$$\Omega < \omega_0\left(1 + \frac{\vartheta_a}{\vartheta_i^*}\right). \tag{IV.26}$$

Conclusion

Supercritical speeds are possible if we have both internal and external damping, which is not possible if we have only internal damping. Under all circumstances we have to maintain that we have enough external damping. The need for external damping increases with the rotatory frequency.

Zusammenfassung

Das Auftreten von innerer und äußerer Dämpfung ermöglicht überkritischen Betrieb, der bei der theoretischen Betrachtung von Fällen mit ausschließlich innerer Dämpfung nicht möglich ist. Es ist jedoch unter allen Umstanden sicherzustellen, dass genügend äußere Dämpfung vorhanden ist, da mit zunehmender Drehzahl die Anforderung an die äußere Dämpfung steigt.



Shafts made of fibre composite tend to be dangerous as well as elastic couplings made with rubber elements or shaft-hub-joints which allow relative movement. Easyly detachable shaft-hub-joints as seen in loboratory centrifuges hold a high risk in cases of improper mounting. Finally we should consider that in these cases of loose shaft-hub-joints, dry or COULOMB's friction occurs and not NEWTON's damping as considered here consistently. Therefore the calculations that are made here cannot be applied directly to these cases of dry friction, however we recommend avoiding internal damping in general.

Gefahren liegen bei Wellen aus Faserverbundwerkstoffen, Kupplungen mit Gummielementen, Welle-Nabenverbindungen, die Relativbewegungen ermöglichen. Leicht lösbare Welle-Nabenverbindungen, wie sie bei Laborzentrifugen üblich sind, bergen bei nicht sachgerechter Montage ein hohes Risiko. Abschließend sei darauf hingewiesen, dass in den Fällen der losen Welle-Nabenverbindung trockene (COULOMBsche) Reibung entsteht und nicht wie hier durchgehend betrachtet NEWTONsche Dämpfung. Deshalb sind die hier entwickelten Rechenwege nicht direkt für Fälle von trockener Reibung anwendbar. Trotzdem kann uneingeschränkt empfohlen werden, innere Dämpfung grundsätzlich zu vermeiden.

Literatur

[BED03] Bedford, A.; Fowler, W.: *Engineering Mechanics, Dynamics Principles*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2003.

[BEH85] Behr, Dietrich: *Rotordynamik*. Vorlesung, TU Clausthal, 1985-1989.

[BEH07] Behr, Dietrich: *Persönliche Mitteilungen*. Clausthal-Zellerfeld, 1986-2007.

[BRO03] Bronshtein, I. N.; Semendyayev, K. A.; Musiol, G.; Muehlig, H.: *Handbook of Mathematics*. Berlin: Springer Verlag, 2003.

[BRO05] Bronstein, I. N.; Semendjajev, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt a. M.: Deutsch (Harri), 2005.

[CRO95] Croft, A.; Davison, R.; Hargreaves, M.: *Introduction to Engineering Mathematics*. Harlow: Prentice Hall, 1995.

[EHR04] Ehrich, Fredric F. (ed): *Handbook of Rotordynamics*. Malabar, FL: Krieger Publishing Company 2004.

[GAS02] Gasch, R.; Nordmann, R. Pfützner, H.: *Rotordynamik*. Berlin: Springer Verlag, 2002.

[GOO89] Goodwin, M. J.: *Dynamics of Rotor-Bearing Systems*. London: Unwin Hyman, 1989.

[HAR52] Den Hartog, J. P.; Mesmer, G.: *Mechanische Schwingungen*. Berlin: Springer Verlag, 1952.

[HAR85] Den Hartog, Jacob P.: *Mechanical Vibrations*. New York, NY: Dover Publications, 1985.

[JEF19] Jeffcott, H. H.: *The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighbourhood of a Whirling Speed. — The Effect of Want of Balance*. Philosophical Magazine and Journal of Science, Jan. – June 1919, p 304.

[KEL96] Kelly, S. Graham: *Mechanical Vibrations*. Schaums's Outline, New York, NY: McGraw Hill, 1996.

[KES98] Kessel, S.; Fröhling, D.: *Technische Mechanik, Technical Mechanics*. Stuttgart: Teubner, 1998.

[KRA93] Krämer, Erwin: *Dynamics of Rotors and Foundations*. Berlin: Springer Verlag, 1993.

[LAL98] Lalanne, M.; Ferraris, G.: *Rotordynamics Prediction in Engineering*, 2nd ed. Chichester: John Wiley and Sons, 1998.

[MAG71] Magnus, Kurt: *Kreisel*. Berlin: Springer Verlag, 1971.

[MAR69] Marples, V.: *Dynamics of Machines*. London: McGraw–Hill, 1969.

[MUS05] Muszyńska, Agnieszka (Agnes): *Rotordynamics*. Boca Raton, FL: Taylor & Francis, 2005.

[RAN69] Rankine, W. J. Macquorn: *On the Centrifugal Force of Rotating Shafts*. The Engineer, 9 April 1869, p 249.

[RAO91] RAO, J. S.: *Rotor Dynamics*. New Dehli: Wiley Eastern Ltd, 1991.

[SPI04] Spiegel, L.; Limbrunner, G.: *Applied Statics and Strength of Materials*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2004.

[VEN90] Venghaus, Joachim: *Rotordynamik*. Vorlesung, TU Clausthal, 1990-1991.

[VEN91] Venghaus, Joachim: *Untersuchung des Stabilitätsverhaltens parametrisch angeregter Rotorsysteme*. Dissertation, TU Clausthal, 1991.