

# Technische Mechanik im Wirtschaftsingenieurwesen

Joachim Venghaus\*

8. September 2023

## Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I. Statik</b>   | <b>10</b> |
| <b>1. Kräfte</b>   | <b>10</b> |
| 1.1. Kraftbegriff . . . . .  | 10        |
| 1.1.1. Übung, drei Kräfte . . . . .  | 14        |
| 1.1.2. Übung, Leitungsmast . . . . .   | 16        |
| 1.1.3. Übung, drei Schlepper . . . . .   | 17        |
| 1.1.4. Übung, Kranhaken . . . . .  | 19        |
| 1.2. Gleichgewichtsbedingung . . . . .   | 20        |
| 1.2.1. Übung, drei Gewichte mit zwei Rollen . . . . .                                      | 21        |
| 1.2.2. Übung, Leine mit Querkzug . . . . .   | 24        |
| 1.2.3. Übung, Hahnepot . . . . .   | 25        |
| 1.3. Schnittmethode . . . . .  | 27        |
| 1.4. Kräfte an starren Körpern . . . . .   | 28        |
| <b>2. Momente</b>  | <b>31</b> |
| 2.1. Kräftepaare . . . . .   | 31        |
| 2.1.1. Übung, zwei Kräfte im KS . . . . .  | 38        |
| 2.1.2. Übung, flacher Rahmen mit drei Kräften . . . . .                                    | 41        |
| 2.1.3. Übung, Rahmen mit schräger Kraft . . . . .  | 43        |
| 2.2. Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte mit verschiedenen Kraftangriffspunkten . . . . . | 45        |
| 2.3. Körpersysteme . . . . .   | 46        |

---

\*Hochschullehrer an der Hochschule Stralsund

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| 2.4.       | Die Schnittmethode und ihre Anwendung . . . . .                 | 46         |
| 2.4.1.     | Übung, dreiwertig gelagerter Balken . . . . .                   | 53         |
| 2.4.2.     | Übung, Brücke mit schräger Kraft . . . . .                      | 56         |
| 2.4.3.     | Übung, raten Sie mal was das ist . . . . .                      | 58         |
| 2.5.       | Statisch bestimmte und unbestimmte Lagerung . . . . .           | 60         |
| 2.4.4.     | Übung, Balken mit Gelenk . . . . .                              | 62         |
| 2.4.5.     | Übung, Eisenbahnwagen am Prellbock . . . . .                    | 65         |
| 2.4.6.     | Übung, Hakenschlüssel . . . . .                                 | 68         |
| 2.4.7.     | Übung; Grubenausbau . . . . .                                   | 70         |
| <b>3.</b>  | <b>Grundlagen der trockenen Reibung, Coulombsche Reibung</b>    | <b>74</b>  |
| 3.1.       | Haftreibung (Reibung des Ruhezustands) . . . . .                | 74         |
| 3.1.1.     | Übung, zwei Klötze an der Tischkante . . . . .                  | 79         |
| 3.1.2.     | Übung, Auto auf schiefer Ebene . . . . .                        | 81         |
| 3.1.3.     | Übung, zwei Klötze, eine Leine . . . . .                        | 84         |
| 3.2.       | Gleitreibung, Reibung der Bewegung . . . . .                    | 86         |
| 3.2.1.     | Übung, Postkutschenbremse . . . . .                             | 88         |
| 3.3.       | Seilreibung am Kreisquerschnitt . . . . .                       | 92         |
| 3.3.1.     | Übung, Abseilen am Brückengeländer . . . . .                    | 95         |
| 3.3.2.     | Übung, Bandbremse . . . . .                                     | 97         |
| 3.4.       | Zusammenfassung der Coulombschen/trockenen Reibung . . . . .    | 100        |
| <b>II.</b> | <b>Festigkeitslehre</b>   | <b>101</b> |
| <b>1.</b>  | <b>Schnittkräfte und Schnittmomente an schlanken Strukturen</b> | <b>101</b> |
| 1.1.       | Beanspruchungsgrößen bei Biegung: . . . . .                     | 102        |
| 1.1.1.     | Übung, der Haken . . . . .                                      | 108        |
| 1.2.       | Kontinuierliche Belastung bei Biegung . . . . .                 | 117        |
| 1.2.1.     | Übung, Streckenlast 2, 1 . . . . .                              | 118        |
| 1.2.2.     | Übung, Teilstreckenlast . . . . .                               | 122        |
| 1.2.3.     | Übungsaufgabe, Sprungbrett . . . . .                            | 127        |
| 1.2.4.     | Übungsaufgabe, Streckenlast 3 . . . . .                         | 128        |
| <b>2.</b>  | <b>Spannungen und Verformungen</b>                              | <b>129</b> |
| 2.1.       | Spannungen . . . . .  | 129        |
| 2.1.1.     | Übung: Kraft an Volumenelement . . . . .                        | 134        |
| 2.2.       | Verformungen . . . . .  | 135        |
| 2.3.       | Zusammenhang zwischen Spannung und Verformung . . . . .         | 137        |
| 2.4.       | Elastischer Bereich, HOOKEsches Gesetz . . . . .                | 142        |
| 2.4.1.     | Übungsaufgabe, Längenänderung eines Quaders . . . . .           | 145        |
| <b>3.</b>  | <b>Vergleichsspannungshypothesen</b>                            | <b>147</b> |
| 3.0.1.     | Übungsaufgabe, Knotenblech 2, TRESKA . . . . .                  | 149        |

|  |            |
|--|------------|
| 3.0.2. Übungsaufgabe, Kesselformel . . . . .                             | 152        |
| <b>4. Bestimmung der Hauptspannungen</b>                                 | <b>157</b> |
| 4.1. Berechnung . . . . .  | 158        |
| 4.2. Zeichnerische Methode, MOHRscher Kreis . . . . .                    | 158        |
| 4.2.1. Übungsaufgabe, zwei MOHRsche Kreise . . . . .                     | 160        |
| <b>5. Elementare Berechnung der Balkenbiegung</b>                        | <b>163</b> |
| 5.1. BERNOULLI'sche Annahmen (Auszüge) . . . . .                         | 163        |
| 5.2. Flächenträgheitsmomente . . . . .                                   | 164        |
| 5.3. Differentialgleichung der Balkenbiegung . . . . .                   | 166        |
| 5.3.1. Übungsaufgabe, Streckenlast, Biegelinie . . . . .                 | 172        |
| 5.3.2. Übungsaufgabe, zwei Bereiche, Biegelinie . . . . .                | 175        |
| 5.3.3. Übung, Streckenlast, Durchbiegung . . . . .                       | 179        |
| 5.4. Spannungen am Biegebalken . . . . .                                 | 182        |
| 5.4.1. Übungsaufgabe, MOHRsche Kreise am Biegebalken . . . . .           | 183        |
| 5.4.2. Übung, Balken mit Einzelkraft, Sicherheit gegen Fließen . . . . . | 189        |
| <b>6. Axialbelastung von Stäben, elastische Stabknickung</b>             | <b>192</b> |
| 6.0.1. Übungsaufgabe, einfache Stabknickung . . . . .                    | 193        |
| 6.0.2. Übungsaufgabe, Knickung eines Dreigelenks . . . . .               | 195        |
| <b>7. Torsion einer Welle mit Kreis(ring)querschnitt</b>                 | <b>197</b> |
| 7.1. Polares Flächenträgheitsmoment . . . . .                            | 198        |
| 7.1.1. Übung, Propellerwelle . . . . .                                   | 200        |
| 7.2. Differentialgleichung der Torsion . . . . .                         | 202        |
| 7.2.1. Übung: Drillwinkelverlauf, zwei Bereiche . . . . .                | 203        |
| 7.3. Spannung an der tordierten Welle . . . . .                          | 206        |
| 7.3.1. Übungsaufgabe, Gelenkwelle eines Autos . . . . .                  | 208        |
| 7.4. Analogie Torsion – Biegung . . . . .                                | 213        |
| <br>   |            |
| <b>III. Dynamik</b>  | <b>214</b> |
| <b>1. Kinematik</b>  | <b>214</b> |
| 1.1. Lage . . . . .  | 214        |
| 1.2. Geschwindigkeit . . . . .   | 215        |
| 1.3. Beschleunigung . . . . .  | 216        |
| 1.3.0. Übung, Vorbemerkung zur Kinematik . . . . .                       | 220        |
| 1.3.1. Übung, Spurt von Null auf 100 . . . . .                           | 221        |
| 1.3.2. Übung, Massenpunkt auf Kreisbahn . . . . .                        | 222        |
| 1.3.3. Übung, Kreuzung mit Motorrädern . . . . .                         | 223        |
| 1.3.4. Übung, Auto im Nebel . . . . .                                    | 226        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>2. Kinetik</b>   | <b>228</b> |
| 2.1. NEWTONsche Axiom . . . . .                                 | 228        |
| 2.1.1. Übung, Hunt in den Schacht gefallen . . . . .            | 230        |
| 2.1.2. Übung, schräger Schuss . . . . .                         | 233        |
| 2.2. Arbeit am Massenpunkt . . . . .                            | 236        |
| 2.3. Leistung am Massenpunkt . . . . .                          | 237        |
| 2.3.1. Übung, Schrägaufzug, Förderarbeit . . . . .              | 241        |
| 2.4. Leistung bei stationären Bewegungen . . . . .              | 243        |
| 2.4.1. Übung, Treideln eines Schiffs . . . . .                  | 244        |
| 2.4.2. Übung, Schrägaufzug mit Angabe der Leistung . . . . .    | 245        |
| 2.5. Arbeitssatz für Massenpunkte . . . . .                     | 246        |
| 2.5.1. Übung, Reibung mit Arbeitssatz . . . . .                 | 247        |
| <br>  |            |
| <b>3. Hauptsätze der Körperdynamik</b>                          | <b>249</b> |
| 3.1. Schwerpunktsatz . . . . .                                  | 249        |
| 3.2. Impulsmomentensatz . . . . .                               | 250        |
| 3.2.1. Übung, Zweikörpersystem . . . . .                        | 253        |
| 3.2.2. Übung, gebremster Förderkorb . . . . .                   | 256        |
| 3.2.3. Übung, Wäscheschleuder . . . . .                         | 260        |
| 3.2.4. Übung, Förderkorb, Seilkräfte . . . . .                  | 263        |
| 3.2.5. Übung, Grinding disk goes berserk . . . . .              | 266        |
| 3.3. Arbeit und Leistung bei rotatorischen Bewegungen . . . . . | 269        |
| 3.3.1. Übung, Schnittleistung . . . . .                         | 270        |
| 3.3.2. Übung, Arbeit an der Kurbel . . . . .                    | 271        |
| 3.3.3. Übung, Lokschuppendrehscheibe . . . . .                  | 272        |
| 3.4. Arbeitssatz bei Drehung um eine feste Achse . . . . .      | 273        |
| 3.4.1. Übung, Wäscheschleuder mit Arbeitssatz . . . . .         | 274        |
| <br>  |            |
| <b>4. Stoßvorgänge</b>  | <b>276</b> |
| 4.1. Völlig elastischer Stoß . . . . .                          | 279        |
| 4.2. Völlig unelastischer Stoß . . . . .                        | 279        |
| 4.3. Teilelastischer (realer) Stoß . . . . .                    | 279        |
| 4.4. Zusammenfassung . . . . .                                  | 281        |
| 4.4.1. Übung, Stoß zweier Klötze . . . . .                      | 282        |
| 4.4.2. Übung, vier Eisenbahnwagen . . . . .                     | 285        |

Blauer Text beschreibt Hintergrundinformationen, Abschweifungen und Unsachliches. Gelegentlich sollen die blauen Passagen der Aufheiterung dienen und entsprechen den Anekdoten, die ich in einer Präsenzvorlesung erzählen würde.

## Mathematische Grundlagen

**Einheiten** Banale Feststellung:

Nur Größen gleicher physikalischer Einheit dürfen addiert und subtrahiert werden.

$$3 \text{ m} + 2 \text{ m} = 5 \text{ m}; \quad 7 \text{ m} + 5 \text{ N} = \text{grober Unfug!}$$

Einheitenfehler sind die Hauptdurchfallursache in den Klausuren. Häufig entstehen die Fehler beim Kürzen.

Finde den Fehler  $\frac{\ell}{2\ell} = \frac{1}{\ell}, \quad \frac{\ell}{2\ell} = \frac{1}{2}.$

Wer mit  $\frac{1}{\ell}$  weiter rechnet, erzeugt nur Kraut und Rüben.

Im Gegensatz dazu: Größen gleicher und unterschiedlicher Einheiten dürfen multipliziert und dividiert werden.

$$3 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 6 \text{ m}^2, \quad 7 \text{ m} \cdot 5 \text{ N} = 35 \text{ Nm}.$$

Wichtig hierbei ist, dass auch die Einheiten miteinander multipliziert werden. Das Ergebnis ist mit keinem seiner Faktoren vergleichbar.

Es gibt eine Konvention bei Setzen von mathematischen Texten: Variablen, die nur durch Leerzeichen voneinander getrennt sind, werden miteinander multipliziert.

$$2 a b = 2 \cdot a \cdot b$$

Bei Gleichungen mit Zahlenwerten sind Malpunkte zu setzen.

$$3 \cdot 5 = 15.$$

Spätestens in der Bachelorarbeit werden Sie selbst Formeln mit dem Computer schreiben. Was Sie dann auf keinen Fall benutzen sollten sind Schreibweisen wie

$$2 \text{ x } 3 = 6 \quad \text{oder} \quad 3 * 4 = 12$$

Sie brauchen den Punkt auf halber Höhe. Selbst bei Windows soll es einen geben. Hier in  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  wird er mit `\cdot` erzeugt.

**SI-Einheiten** Die Basiseinheiten des internationalen Einheitensystems SI (frz. *Système international d'unités*) lauten

**m** Meter, Länge  $\ell$

**s** Sekunde, Zeit  $t$

**kg** Kilogramm, Masse  $m$

**A** Ampere, Elektrischer Strom  $I$

**K** Kelvin, Temperatur  $T$

**mol** Mol, Stoffmenge  $n$

**cd** Candela, Lichtstärke  $\ell_v$

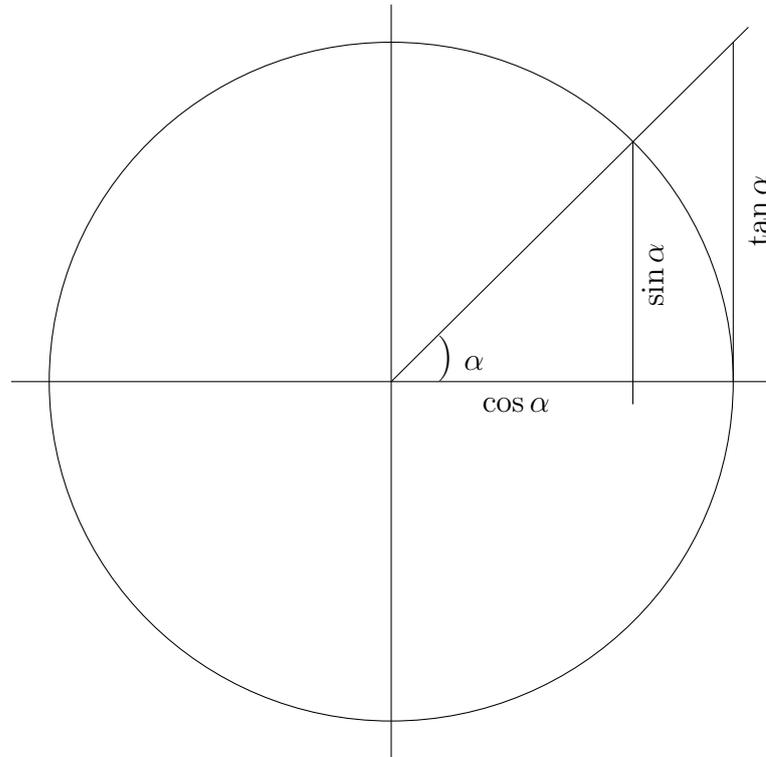
Daraus werden alle andere Einheiten abgeleitet. Beispiele:

$$\text{Kraft: } N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}, \quad \text{Arbeit: } J = \text{Nm} = \text{Ws} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}, \quad \text{El. Spannung: } V = \frac{\text{kg m}^2}{\text{A s}^3},$$

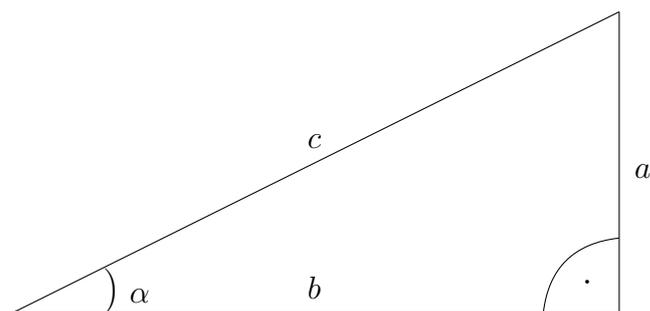
Beantworten Sie nach jeder Rechnung zwei Fragen

1. Habe ich nur Größen gleicher Einheit addiert?
2. Stimmt die errechnete Einheit mit der erwarteten Einheit überein.

**Trigonometrische Funktionen:** Anschauliche Darstellung im Einheitskreis (Kreis mit Radius 1)



Gebäuchlich ist auch die Darstellung am rechtwinkligen Dreieck.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Hier drei Formeln auswendig zu lernen ist ziemlich blöd. Wenn wir künftig schräg stehende Kräfte (hier  $c$ ) in achsenparallele Komponenten zerlegen, gehen wir wie folgt vor: Wir suchen zuerst die Komponente (Dreieckseite), die am Winkel dran liegt (hier  $b$ ). Diese Komponente geht mit dem Kosinus. Die andere geht mit dem Sinus. Merkspruch: Wo sitzt der Co-Trainer? Dicht beim Trainer.

**Winkelangaben** sind in Grad oder Bogenmaß möglich. Bogenmaß ist mathematisch korrekt, für Gradzahlen haben wir ein Gefühl. Die Umrechnung ist einfach

$$\check{\alpha} = \frac{2\pi}{360^\circ} \alpha^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha^\circ$$

Sie kontrollieren bei Gelegenheit Ihren Taschenrechner. Er muss auf 'D' wie degree stehen. Die Alternativen sind 'R' wie radiant (Bogenmaß) oder 'G' wie gon. Letzteres ist sehr gemein. Der Buchstabe G ist verlockend (Verwechslung mit Grad). Jedoch misst ein rechter Winkel 100 gon. Diesen Fehler merkt man lange nicht, er versaut aber jedes Rechenergebnis. Artilleristen und Landvermesser rechnen in gon. Finger weg.

### Wichtige trigonometrische Formeln

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Die erste Gleichung ist wichtig. Die anderen beiden Gleichungen werden Additionstheoreme genannt, kein Mensch muss sie auswendig können.

**Trigonometrische Umkehrfunktionen:** Gegeben sei

$$y = \sin \alpha$$

Gesucht sei der Winkel  $\alpha$  bei gegebenem Wert  $y$ . Es gilt

$$\alpha = \arcsin y$$

analog gibt es auch

$$\alpha = \arccos y$$

$$\alpha = \arctan y$$

Die Hersteller von Taschenrechnern machen es inzwischen alle falsch. Sie bezeichnen die Arcusfunktionen mit ' $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$ ,  $\tan^{-1}$ '. Das ist nicht die Umkehrfunktion, das ist der Kehrwert. Hewlett Packard (HP) hat sich lange gegen diesen Unfug gestemmt. Sie verwendeten  $\text{asin}$ ,  $\text{acos}$ ,  $\text{atan}$ . Inzwischen sind auch die eingeknickt und machen diesen Unfug mit. Arcus ist lateinisch und heißt Bogen. Die Arcusfunktionen liefern also einen Winkel im Bogenmaß. Es sei denn, Sie haben den Taschenrechner auf 'D' gestellt, dann liefern sie einen Winkel in Grad.

### **Exponential und Logarithmusfunktion**

Bis wir die brauchen, waren sie in Mathematik dran

# Teil I.

## Statik

### 1. Kräfte

#### 1.1. Kraftbegriff

Jede Einwirkung auf einen Körper, die Bewegungs- und/oder Formänderung bewirkt, wird als „Kraft“ bezeichnet.

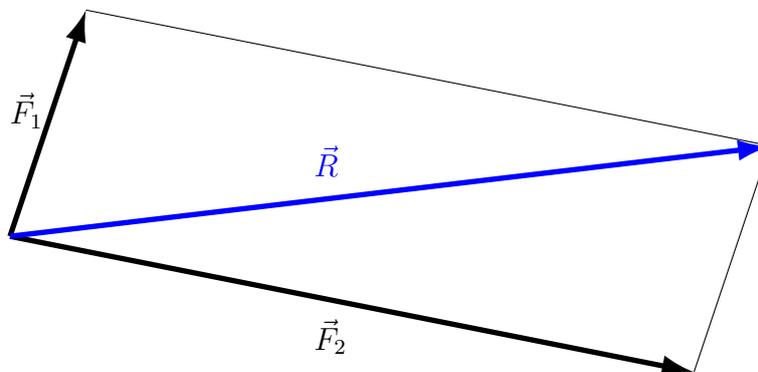
Maßeinheiten gemäß SI.

$$\text{Kraft } F: \quad 1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}.$$

Eine Kraft ist charakterisiert durch Betrag in N, Richtung und Kraftangriffspunkt. Daher stellen wir folgendes Axiom<sup>1</sup> auf:

#### Kräfte sind Vektoren

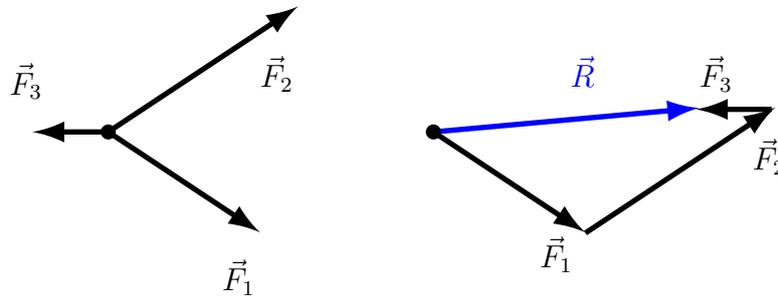
Eigenschaften von Kräften sind mit Mitteln der Vektorrechnung beschreibbar. Z.B. Addition zweier Kräfte als Bildung einer Resultierenden.



---

<sup>1</sup>Axiom: Arbeitshypothese, die nicht bewiesen werden kann. Die Hypothese ist gültig, so lange sie nicht widerlegt wird. Diese hier wurde bisher nicht widerlegt.

Es können beliebig viele Kräfte mit gemeinsamem Kraftangriffspunkt zu einer Resultierenden zusammengefasst werden. So etwas wird ein „zentrales Kräftesystem“<sup>2</sup> genannt. Vorgehensweise mittels „Krafteckkonstruktion“.



Allgemein gilt bei  $N$  Kräften

$$(I.1) \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{R}$$

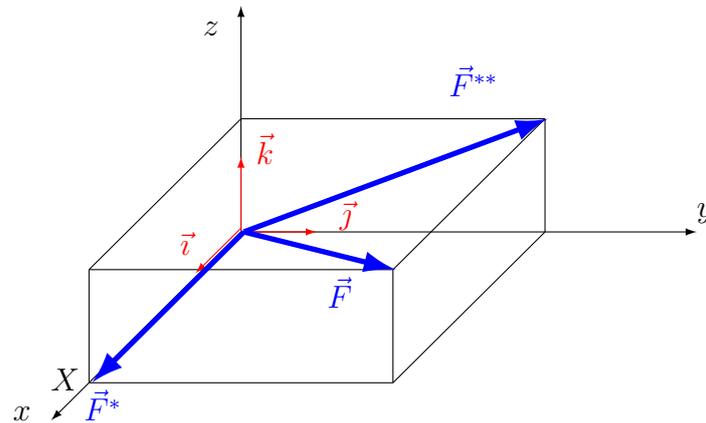
Solange alle Kräfte in einer Ebene liegen, sind zeichnerische Lösungen gut machbar. Spätestens bei räumlichen Problemen wird eine rechnerische Lösung mittels Gleichung ( I.1) nötig.

Vorgehensweise:

- Vorgabe eines Koordinatensystems mit den Einheitsvektoren  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Geläufiger ist uns ein Koordinatensystem mit den Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .  
Beides ist möglich und zulässig. Wir benötigen später die Kenntnis über Einheitsvektoren, die immer die Länge 1 haben. Nicht 1 cm, sondern 1 ohne Einheit.
- Zerlegen der Kraft  $\vec{F}_i$  in ihre Komponenten in  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ -Richtung ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ -Richtung).
- Komponentenweise Addition aller Kräfte  $\vec{F}_i$ .

Stellen Sie sich die blaue Kraft  $\vec{F}$  vor, als sei sie die Raumdiagonale eines flachen Kartons.

<sup>2</sup>Zentrales Kräftesystem: Mehrere Kräfte mit gemeinsamem Kraftangriffspunkt.

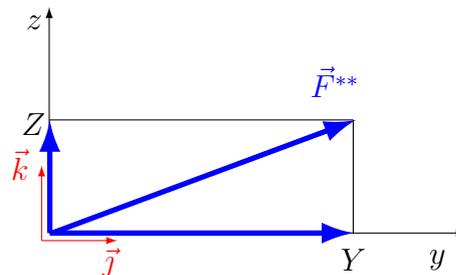


Wir gehen schrittweise vor.

1.  $\vec{F}$  zerlegen in  $\vec{F}^*$  (x-Komponente) und  $\vec{F}^{**}$  (in y-z-Ebene), also

$$\vec{F} = \vec{F}^* + \vec{F}^{**}, \quad \vec{F}^* = X \vec{i}$$

2.  $\vec{F}^{**}$  weiter zerlegen in y- und z-Komponente.



somit

$$(I.2) \quad \vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}.$$

Hierbei ist  $X$  die  $x$ -Komponente der Kraft  $\vec{F}$ , multipliziert mit  $\vec{i}$ , der  $x$ -Richtung.

Wir müssen künftig darauf achten, dass links und rechts vom Gleichheitszeichen jeweils Vektoren stehen (ist hier der Fall).

Komponentenweise Addition aller Kräfte

$$(I.3) \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N X_i \vec{i} + \sum_{i=1}^N Y_i \vec{j} + \sum_{i=1}^N Z_i \vec{k}.$$

Es ist  $\sum_{i=1}^N X_i = R_x$  die  $x$ -Komponente der Resultierenden.

Hier sehen wir links und rechts vom Gleichheitszeichen skalare Größen. Das ist natürlich auch zulässig. Links Vektor, rechts Skalar, das ist verboten.

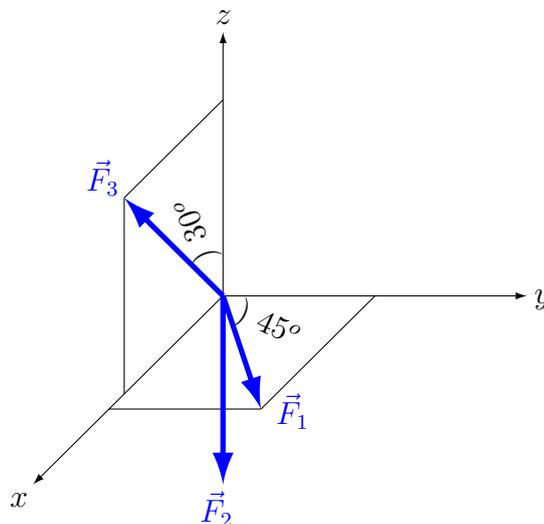
Für  $R_y$  und  $R_z$  gilt entsprechendes. Für den Betrag von  $\vec{R}$  gilt

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$



### 1.1.1. Übung, drei Kräfte

Gegeben:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  mit  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = F$ .



11-1.TEX

Gesucht: Die Resultierende  $\vec{R}$ .

Vektoren, wie z.B. den Vektor der Resultierenden, schreiben wir zur Vereinfachung als Spaltenvektor

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}.$$

Wir erinnern uns an die mathematisch korrekte Sinus-, Kosinus- und Tangenswerte für runde Winkel. Natürlich bevorzugen Sie die dezimalen Ergebnisse Ihres Taschenrechners. Zum Schluss gibt es zur Vermeidung des Taschenrechners noch eine gute Eselsbrücke.

|     | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°      |
|-----|----|----------------------|----------------------|----------------------|----------|
| sin | 0  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1        |
| cos | 1  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        | 0        |
| tan | 0  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | $\infty$ |

Nun zerlegen wir die drei Kräfte in ihre Komponenten.

Wir beginnen mit  $\vec{F}_1$  und sehen, dass der 45°-Winkel zwischen Kraft und  $y$ -Achse liegt. Die  $y$ -Komponente von  $\vec{F}_1$  wird daher vom Kosinus gebildet. Die  $x$ -Komponente wird

demzufolge vom Sinus gebildet. Eine  $z$ -Komponente gibt es nicht, da  $\vec{F}_1$  in der  $x, y$ -Ebene liegt.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \sin 45^\circ \\ F \cos 45^\circ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{F}_2$  zeigt direkt nach unten, das ist die negative  $z$ -Achse.

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}$$

Bei  $\vec{F}_3$  liegt der Winkel  $30^\circ$  zwischen Kraft und  $z$ -Achse, also bildet der Kosinus die  $z$ -Komponente

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \sin 30^\circ \\ 0 \\ F \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

Nun wird komponentenweise addiert

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3$$

$$R_x = F \sin 45^\circ + 0 + F \sin 30^\circ$$

$$R_x = F \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$R_y = F \cos 45^\circ + 0 + 0$$

$$R_y = F \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_z = 0 - F + F \cos 30^\circ$$

$$R_z = F \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)$$

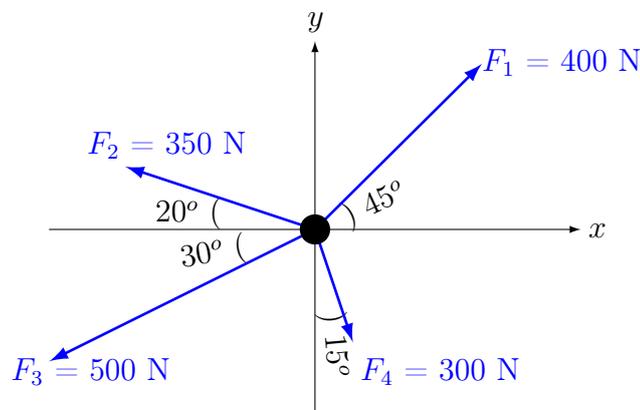
$$\vec{R} = F \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

Die versprochene Eselsbrücke für Sinus und Kosinus

|     | $0^\circ$            | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$           |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| sin | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ |

### 1.1.2. Übung, Leitungsmast

Auf einen Leitungsmast wirken vier Kräfte in horizontaler Ebene



111-2.TEX

Gesucht: Die Resultierende  $\vec{R}$ .

Eine andere Schreibweise war

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i$$

Wir zerlegen die vier Kräfte in Komponenten und beginnen jeweils mit der Komponente, die am 'Winkel dran liegt', sie wird vom Kosinus gebildet. Ab  $\vec{F}_2$  kommt hinzu, dass manche Kraftkomponenten in negative Koordinatenrichtung zeigen.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1 \cos 45^\circ \\ F_1 \sin 45^\circ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -F_2 \cos 20^\circ \\ F_2 \sin 20^\circ \\ 0 \end{pmatrix}$$

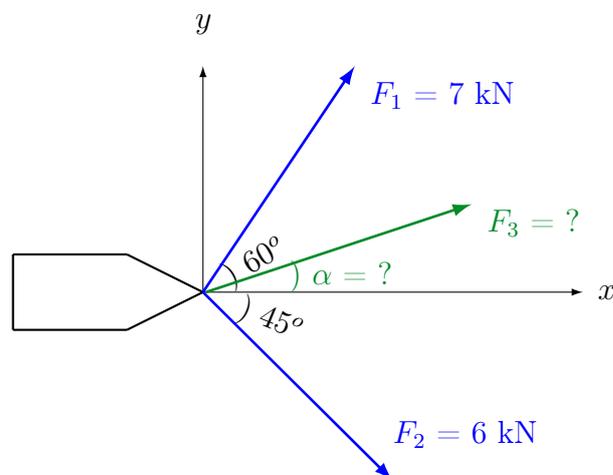
$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -F_3 \cos 30^\circ \\ -F_3 \sin 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} F_4 \sin 15^\circ \\ -F_4 \cos 15^\circ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Taschenrechner liefert:

$$R_x = -401,4 \text{ N}, \quad R_y = -137,2 \text{ N} \quad \text{oder} \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} -401,4 \\ -137,2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N.}$$

### 1.1.3. Übung, drei Schlepper

Ein Schiff wird von drei Schleppern gezogen



111-3.TEX

Mit welchem Kraftbetrag und in welche Richtung muss Schlepper 3 ziehen, damit das Schiff mit 10 kN genau in  $x$ -Richtung geschleppt wird?

Hier kennen wir die Resultierende (=resultierende Kraft) und müssen eine unbekannte Kraft berechnen. Erstmals wird hier ein Farbschema eingeführt, das der Übersicht dienen soll. Bekannte Kräfte sind blau dargestellt, gesuchte Kräfte grün.

Es gilt

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

mit

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1 \cos 60^\circ \\ F_1 \sin 60^\circ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} +F_2 \cos 45^\circ \\ -F_2 \sin 45^\circ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den Vektor  $\vec{R}$  haben wir aus der Aufgabenstellung erstellt. Mit  $R = 10$  kN soll es genau in  $x$ -Richtung gehen. Für  $\vec{F}_3$  haben wir eine Arbeitshypothese aufgestellt. Es wird eine  $x$ - und eine  $y$ -Komponente geben, wie kennen sie nur noch nicht.

Kundige fragen sich, warum bei ebenen Problemen die Vektoren drei Komponenten haben. Die  $z$ -Komponente ist doch immer Null, also weg damit. Es ist besser die dritte Komponente mitzuführen, denn bald wird auch bei ebenen Problemen die  $z$ -Komponente

von Bedeutung. Für die Spezialisten: Wir werden aus Kräften und Ortsvektoren (Hebelarmen) Momente berechnen, und das geht mit dem räumlichen Kreuzprodukt. Kommt alles noch.

Wir stellen zwei Komponentengleichungen auf

$$F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 45^\circ + F_{3x} = R$$

$$F_1 \sin 60^\circ - F_2 \sin 45^\circ + F_{3y} = 0$$

Taktischer Hinweis: Unbekannte Größen farblich hervorzuheben dient der Übersicht. Sie unterstreichen unbekannte Größen grün (geht hier nicht). Wir lösen zu den unbekanntenen Größen auf:

$$F_{3x} = R - F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 45^\circ$$

$$F_{3x} = 2,26 \text{ kN}$$

$$F_{3y} = -F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 45^\circ$$

$$F_{3y} = -1,82 \text{ kN}$$

Mit dem Ergebnis

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} +2,26 \\ -1,82 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

kann der Skipper auf Schlepper 3 nichts anfangen. Der braucht die Information 'wie doll' und 'wohin'.

$$F_3 = |\vec{F}_3| = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2}, \quad F_3 = 2,90 \text{ kN}$$

$$\alpha = \arctan \frac{F_{3y}}{F_{3x}}, \quad \alpha = -38,8^\circ.$$

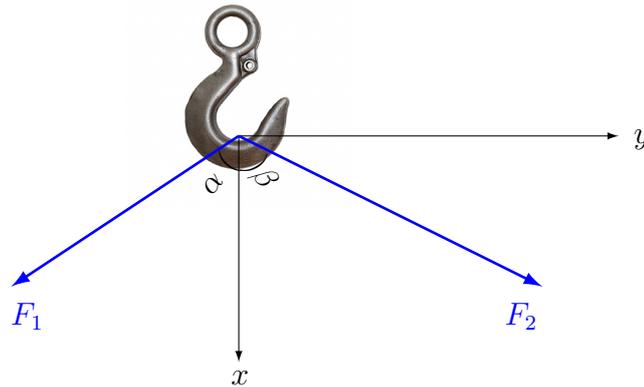
Versuchen Sie an Hand der Aufgabenskizze den Tangens bzw. Arcustangens nachzuvollziehen. Unsere Arbeitshypothese stellt sich als nicht richtig heraus. Schlepper 3 muss nicht oberhalb (unsere Annahme) sondern unterhalb der x-Achse ziehen, der negative Winkel  $\alpha$  fordert das.

### 1.1.4. Übung, Kranhaken

Am Lasthaken eines Krans wirken zwei Kräfte  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ .

- a) Welchen Betrag hat die auf den Haken ausgeübte Zugkraft?  
 b) Wirkt diese in lotrechter Richtung?

$$F_1 = 8,2 \text{ kN}, \quad F_2 = 9,7 \text{ kN}, \quad \alpha = 50^\circ, \quad \beta = 65^\circ.$$



111-4.TEX

a)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = F_1 \begin{pmatrix} +\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2 = F_2 \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 9,4 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN}$$

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad R = 9,7 \text{ kN}$$

b)

$$\varphi = \arctan \frac{R_y}{R_x}, \quad \varphi = 14,9^\circ$$

Da  $\varphi \neq 0^\circ$  ist, lautet die Antwort 'nein'.

## 1.2. Gleichgewichtsbedingung

Axiom:

**Ein System von Kräften mit gemeinsamem Kraftangriffspunkt  
befindet sich im Gleichgewicht, wenn gilt  $\vec{R} \equiv \vec{0}$**

Zwei Anmerkungen: 1. Dieses Axiom wurde bisher nicht widerlegt (Freiwillige vor :-).  
2. das Zeichen  $\equiv$  bedeutet 'ist identisch'. Der Ausdruck  $\vec{R} \equiv \vec{0}$  bedeutet daher, der Vektor  $R$  ist dauerhaft gleich dem Nullvektor (nicht nur vorübergehend).  
 $\equiv$  ist ein besonders wichtigtuerisches ist-gleich-Zeichen.

Bisher haben wir über Gleichgewicht nicht nachgedacht. Unser Leitungsmast war z.B. fest in der Erde verankert. Denken wir bei dem Thema Gleichgewichtsbedingung an ein völlig freischwebendes zentrales Kräftesystem, welches wir daraufhin überprüfen wollen, ob es sich in Bewegung versetzt oder an Ort und Stelle bleibt. In der Statik muss es dies ja tun. Viele Beispiele mit gemeinsamem Kraftangriffspunkt fallen einem hierzu nicht ein. Denken Sie an ein Tauziehen. Wenn eine Markierung am Seil sich weder in die eine noch in die andere Richtung bewegt, dann ist das System im Gleichgewicht.

Unser Axiom angewandt auf Gleichung I.3 auf Seite 12 lautet

$$(I.4) \quad R_x = \sum_{i=1}^N X_i \equiv 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^N Y_i \equiv 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^N Z_i \equiv 0.$$

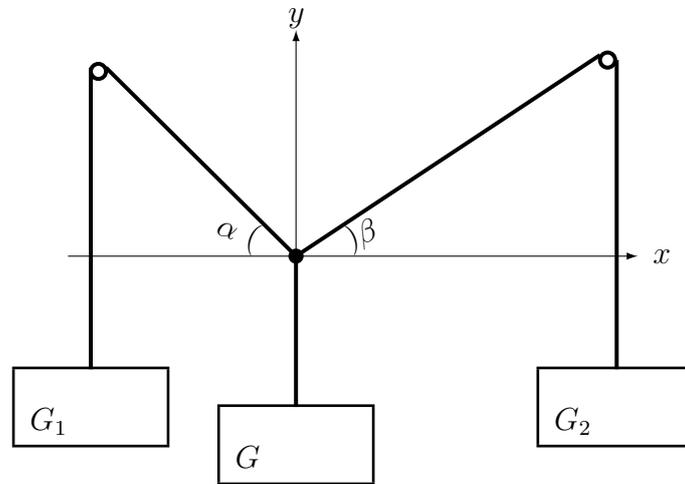
Künftig werden wir diesen Zusammenhang abgekürzt anschreiben.

$$\sum X \equiv 0, \quad \sum Y \equiv 0, \quad \sum Z \equiv 0$$

Vorgelesen lautet das: „Summe  $X$  identisch Null, Summe  $Y$  identisch Null, Summe  $Z$  identisch Null“. Wenn Sie gefragt werden, ob TM schwer ist, müssen Sie antworten „ja, unheimlich, jede Menge Formeln“. Von diesen dreien fällt häufig eine weg, dazu kommt noch eine andere hinzu ( $\sum M_{[P]} \equiv 0$ , die können Sie noch nicht verstehen). Damit kommen wir sehr sehr lange aus. Drei Gleichungen liefern drei unbekannte Größen. Das ist die Kernkompetenz in TM I. ■

### 1.2.1. Übung, drei Gewichte mit zwei Rollen

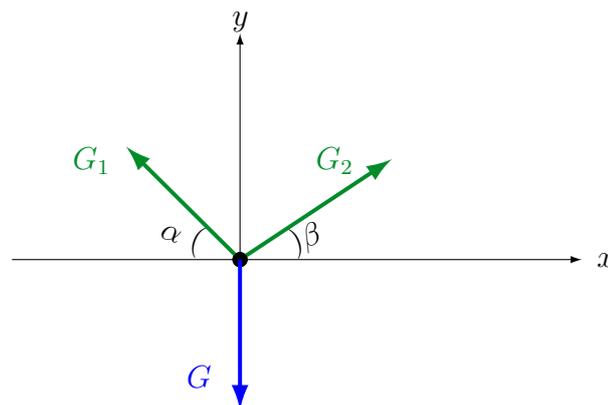
Gegeben: Gewichtskraft  $G$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$



I12-1.TEX

Gesucht:  $G_1$ ,  $G_2$

Uns fehlt gegenwärtig ein wichtiges Prinzip der Technischen Mechanik (Schnittprinzip), weshalb näher erläutert wird. Drei Gewichte sind mit Leinen verbunden, die über zwei Umlenkrollen geführt werden. Als Vorgriff auf das Schnittprinzip schneiden wir alle Leinen durch und bringen die Kräfte  $G$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  an. Die Kräfte wirken ziehend an den Seilen (nur Idioten schieben an Seilen). Diesen Schritt nehmen wir als vorgegeben hin, jetzt wenden wir die Gleichgewichtsbedingung an.



Wie gewohnt gilt :

$$\vec{G}_1 = \begin{pmatrix} -G_1 \cos \alpha \\ +G_1 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{G}_2 = \begin{pmatrix} G_2 \cos \beta \\ G_2 \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\vec{R} \equiv \vec{0} = \vec{G} + \vec{G}_1 + \vec{G}_2.$$

Besser handhabbar ist

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = -G_1 \cos \alpha + G_2 \cos \beta$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = -G + G_1 \sin \alpha + G_2 \sin \beta$$

$$(3) \quad \sum Z \equiv 0 = 0 \quad \text{von selbst erfüllt.}$$

Die unbekanntenen Größen werden grün markiert, Sie unterstreichen, ich färbe ein.

Wir haben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Durch unsere Farbspiele sehen wir deutlich, dass es diesmal nicht so trivial, wie beim letzten Mal ist. Wir entwerfen eine Strategie.

Strategie:

Gleichung (1) nach  $G_1$  auflösen.

$G_1$  in Gleichung (2) einsetzen und nach  $G_2$  auflösen.

Künftig verwenden wir folgende Kurzschrift:

(1)  $\rightarrow G_1$

$G_1$  in (2)  $\rightarrow G_2$ .

Diese Überlegung ist gut investierte Zeit. Wir trennen fehleranfällige Tätigkeiten voneinander. Das Umstellen von Gleichungen ist fehleranfällig, die Planung der Abfolge ist fehleranfällig.

$$(1) \rightarrow G_1 : \quad G_1 = \frac{G_2 \cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$\text{in (2)} \rightarrow G_2 : \quad G_2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \sin \alpha + G_2 \sin \beta = G$$

$$G_2 \left( \cos \beta \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \sin \beta \right) = G$$

$$G_2 (\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta) = G$$

$$G_2 = \frac{G}{\cos \beta \tan \alpha + \sin \beta}$$

Es empfiehlt, von vorne zu beginnen, (1) nach  $G_2$  aufzulösen und in (2) einzusetzen, um  $G_1$  auszurechnen.

$$(1) \rightarrow G_2 : \quad G_2 = \frac{G_1 \cos \alpha}{\cos \beta}$$

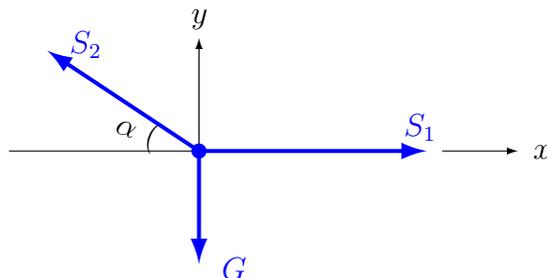
$$\text{in (2)} \rightarrow G_1 : \quad G_1 \left( \sin \alpha + \sin \beta \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) = G$$

$$G_1 (\sin \alpha + \tan \beta \cos \alpha) = G$$

$$G_1 = \frac{G}{\cos \alpha \tan \beta + \sin \alpha}$$

■

## 1.2.2. Übung, Leine mit Querzug

Gegeben:  $G, \alpha$ 

112-2.TEX

Gesucht:  $S_1, S_2$ 

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} -S_2 \cos \alpha \\ +S_2 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = S_1 - S_2 \cos \alpha$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = S_2 \sin \alpha - G$$

(2)  $\rightarrow S_2$ , dann  $S_2$  in (1)  $\rightarrow S_1$ 

Die Farbmarkierungen sagen uns sehr deutlich, dass wir nicht mit Gleichung (1) anfangen sollen. In Gleichung (2) steht nur eine unbekannte Größe, damit fangen wir an. Künftig wird das unsere Taktik sein: Gibt es eine Gleichung mit nur einer Unbekannten? Auf die stürzen wir uns zuerst.

$$(2) \rightarrow S_2 \quad S_2 = \frac{G}{\sin \alpha}$$

$$S_2 \text{ in (1)} \rightarrow S_1 \quad S_1 = \frac{G}{\sin \alpha} \cos \alpha$$

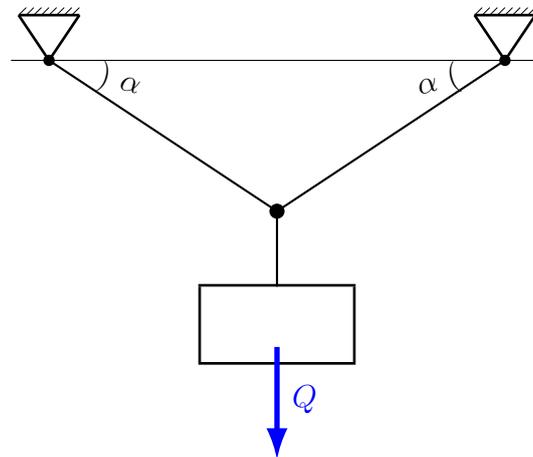
$$S_1 = \frac{G}{\tan \alpha} = G \cot \alpha.$$

Der Kotangens (cot) ist der Kehrwert des Tangens. Es gilt  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \tan^{-1} \alpha$ . Das erklärt, warum ich mich immer so abfällig über die Hersteller von Taschenrechnern äußere. Wir kommen künftig ohne den Kotangens aus. Man sollte ihn nur erkennen können. Gelegentlich gibt es auch die Schreibweise  $\text{ctg } \alpha$ .

Spielen Sie mit Zahlenwerten.  $G = 100 \text{ N}$ ,  $\alpha = 20^\circ, 10^\circ, 5^\circ, 1^\circ, 0,1^\circ$ . Wundern Sie sich über die wundersame Kraftvermehrung. In der nächsten Aufgabe kümmern wir uns um das Phänomen. ■

### 1.2.3. Übung, Hahnepot

Eine Last (Gewichtskraft  $Q = 10 \text{ kN}$ ) soll durch ein Seil gehalten werden, dessen Tragfähigkeit  $20 \text{ kN}$  beträgt.

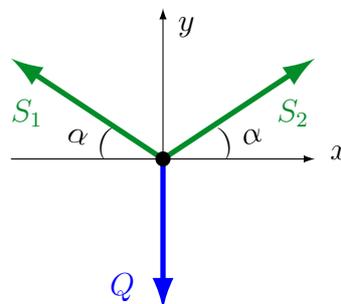


I12-3.TEX

Wie klein darf der Winkel  $\alpha$  werden, ohne dass das Seil reißt?

$10 \text{ kN}$  soll von zwei Seilen getragen werden, die jeweils  $20 \text{ kN}$  tragen können. Wo ist das Problem, fragt man sich zunächst. Wir haben in der vorherigen Übungsaufgabe schon festgestellt, dass Kräfte überraschend groß werden können.

Erneut schneiden wir alle Seile durch und ersetzen sie durch Kräfte.



Wir wollen künftig Schreibarbeit sparen und überspringen das Aufstellen der Spaltenvektoren. Wir beginnen gleich mit den Kräftegleichgewichten. Sie schreiben die Gleichungen an und markieren die unbekanntenen Größen anschließend grün.

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = -S_1 \cos \alpha + S_2 \cos \alpha$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = S_1 \sin \alpha + S_2 \sin \alpha - Q$$

(1)  $\rightarrow S_1$ , dann  $S_1$  in (2)

$$(1) \rightarrow S_1 \quad S_1 = S_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = S_2 = S$$

$$S \text{ in (2)} \quad S \sin \alpha + S \sin \alpha = Q$$

$$S = \frac{Q}{2 \sin \alpha}.$$

$$\text{auflösen nach } \alpha \quad \sin \alpha = \frac{Q}{2S}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{Q}{2S}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{10\,000}{40\,000}, \quad \alpha = 14,5^\circ$$

Kranfahrer und Seenotretter müssen über diesen Tatbestand Bescheid wissen. Je kleiner der Winkel  $\alpha$  wird, um so größer werden die Kräfte im schräg verlaufenden Hebezeug.

Auf Grund gelaufene Segelyachten werden gerne mit einer sich gabelnden Schleppleine (einem Hahnepot) quer freigeschleppt. Durch die Zugkräfte neigt sich die querstehende Segelyacht zum Seenotrettungsboot hin (sie krängt), dadurch wird der Tiefgang kleiner und die Yacht löst sich vom Grund. Ist aber der Hahnepot zu kurz (zu kleiner Winkel  $\alpha$ ), werden die Kräfte im Hahnepot zu groß. Dann besteht die Gefahr, dass wir eine Klampe aus dem Deck reißen. Sie fliegt anschließend wie ein Geschoss durch die Gegend. Ist mir zum Glück noch nie passiert. Bei der Hahnepotlänge gilt das 'landwirtschaftliche Nutzprinzip': viel hilft viel :-).

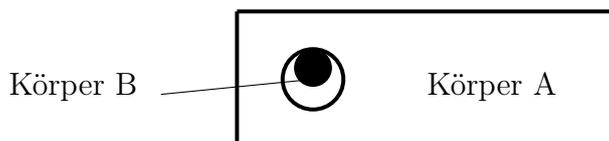
Spielen Sie mit der Formel  $S = \frac{Q}{2 \sin \alpha}$ . Je kleiner Sie  $\alpha$  wählen, desto größer wird die Seilkraft  $S$ .

Bei  $\alpha = 0$  explodiert Ihr Taschenrechner. Sie versuchen durch Null zu teilen. Wie man weiß, kann das nur Chuck Norris<sup>3</sup>. Die Seilkräfte werden unendlich. ■

<sup>3</sup>Wieviele Liegestütze kann Chuck Norris? Antwort: Alle.

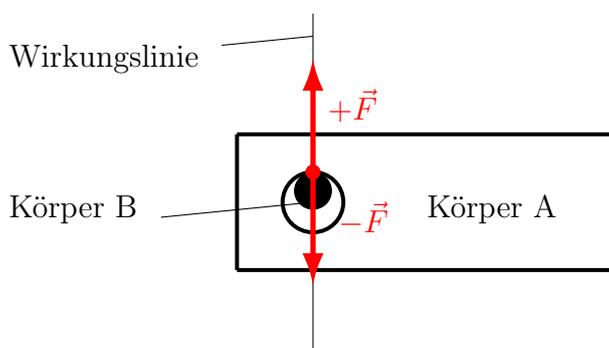
### 1.3. Schnittmethode

Wirken zwei Körper A und B aufeinander, z.B.



so entstehen sowohl eine Kraft von Körper A auf B als auch umgekehrt. Beide Kräfte liegen auf derselben Wirkungslinie, haben gleiche Größe aber entgegengesetzte Richtung (Gegenwirkungsprinzip, drittes Newtonsches<sup>4</sup> Gesetz, *actio = reaction*)

Also:



Nach außen keine Wirkung, d.h. Gleichgewicht.

Wird Körper A von B getrennt (schneiden, freischneiden, freimachen), so bleiben die Körper A und B für sich betrachtet im Gleichgewicht, wenn an den Berührstellen ihre Reaktionskräfte angebracht werden.



<sup>4</sup>Sir Isaac Newton

\* 25. Dezember 1642 jul. / 4. Januar 1643 greg.

† 20. März 1726 jul. / 31. März 1727 greg.

Er gilt als einer der bedeutendsten Wissenschaftler aller Zeiten. Wir wenden hier sein berühmtes Werk, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, von 1687 an. Es gilt als eines der wichtigsten wissenschaftlichen Werke.

Das heißt, Lagerungen werden durch Reaktionskräfte – auch Schnittkräfte genannt – ersetzt.

Es kommt bei Schnittkräften **nicht** darauf an, sie mit der richtigen Richtung (hier Vorzeichen) anzutragen.

Oben erfolgt eine besondere und nur sehr selten benutzte Hervorhebung, dass es sich zweimal um den gleichen Kraftvektor handelt, der in zwei entgegengesetzte Richtungen zeigt ( $+\vec{F}$ ,  $-\vec{F}$ ). Demnächst und insbesondere in Übungen werden wir in Skizzen die Vektorpfeile auf  $\vec{F}$  weglassen und auch keine Vorzeichen anbringen.

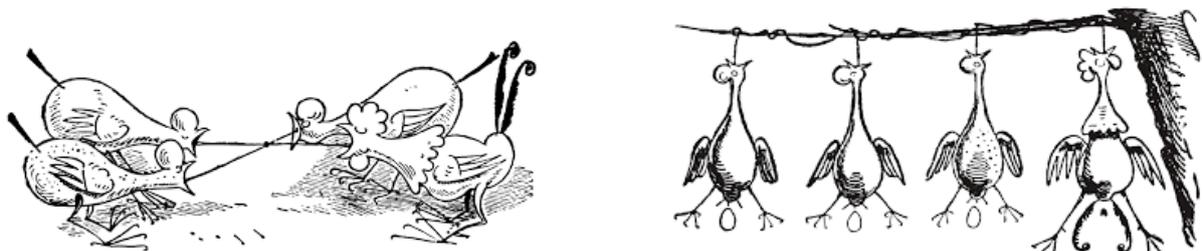


Wir sehen zweimal die gleiche Kraft  $F$ , einmal zeigt sie nach oben, einmal nach unten. Erst beim Aufstellen der Kräftegleichgewichte werden wir Vorzeichen berücksichtigen, indem wir die Kraftrichtung mit der Koordinatenrichtung vergleichen.

Wichtig! Mit Pfeil auf dem Symbol ( $\vec{F}$ ): Minuszeichen sind in Skizzen möglich ( $-\vec{F}$ ).  
Ohne Pfeil auf dem Symbol ( $F$ ): Minuszeichen sind in Skizzen verboten! ■

## 1.4. Kräfte an starren Körpern

Bisher hatten alle Kräfte einen gemeinsamen Kraftangriffspunkt. An starren Körpern können Kräfte auch verschiedene Kraftangriffspunkte haben.

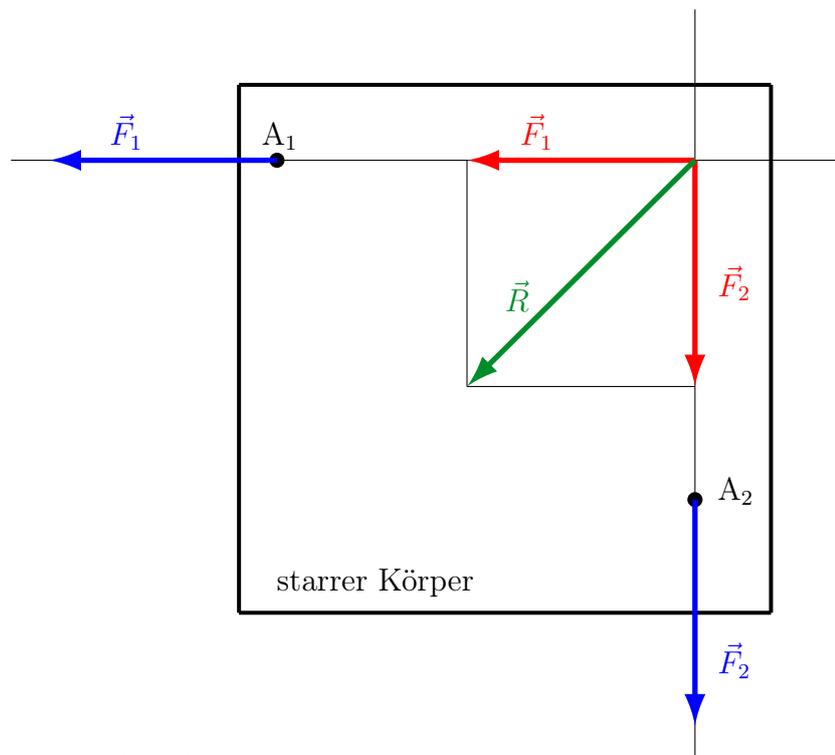


Axiom:

**Eine Kraft, die an einem starren Körper angreift, darf längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden.**

Bildung der Resultierenden.

Gegeben  $\vec{F}_1[A_1]$ ,  $\vec{F}_2[A_2]$ , gesucht  $\vec{R}$ .

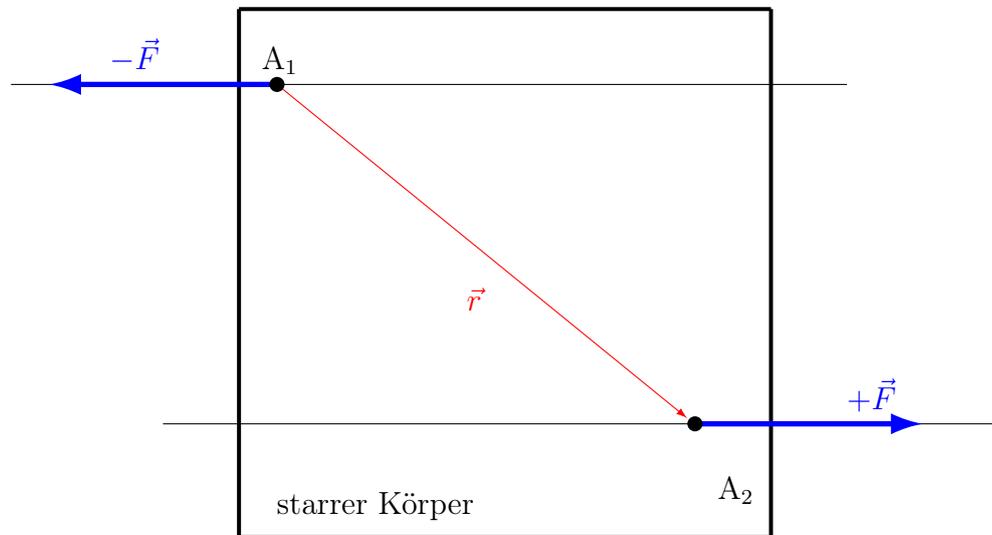


Gegebene Kräfte (blau) werden längs der Wirkungslinie verschoben, bis sie einen gemeinsamen Kraftangriffspunkt haben (rot), dann Resultierende bilden.

Es taucht bei folgendem Spezialfall ein Problem auf: Zwei Kräfte haben parallele Wirkungslinien, sind gleich groß, haben aber entgegengesetzte Richtung. Eine Zusammenfassung zu einer Resultierenden ist nicht möglich.

Nächste Fehleinschätzung: Das ist doch so speziell, so oft wird das doch nicht passieren. Lass uns das auf Lücke setzen, wenn sowas kommt, müssen wir halt passen. Falsch. Dieser Spezialfall ist überaus häufig, wir werden das bald erleben.

## Beispiel



Dieser Sonderfall wird „Kräftepaar“ genannt. Kräftepaare bilden neben den Kräften eine neue physikalische Realität. Der rote Vektor  $\vec{r}$  ist der Verbindungsvektor von Kraftangriffspunkt  $A_1$  zu  $A_2$ . Er wird auch Ortsvektor genannt und stellt ein Längenmaß dar. ■

## 2. Momente

### 2.1. Kräftepaare

Der neuen physikalischen Realität „Kräftepaar“ wird erneut eine vektorielle Größe zugeordnet.

$$(I.5) \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

mit

$\vec{M}$  : Momentenvektor,

$\vec{r}$  : Verbindungsvektor der Kraftangriffspunkte,

$\times$  : Symbol für das Kreuzprodukt, auch Vektorprodukt genannt,

$\vec{F}$  : Kraftvektor

### Einschub Kreuzprodukt

Bevor wir den Momentenvektor näher betrachten, beleuchten wir ganz allgemein das Kreuzprodukt

Gegeben seien zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ . Das Kreuzprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  wird definiert durch

1.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$  und  $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ .

Das heißt, das Kreuzprodukt steht auf beiden erzeugenden Vektoren senkrecht ( $\perp$ ).

2.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $(\vec{a} \times \vec{b})$  bilden ein Rechtssystem.

Spreizen Sie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand so, dass der Mittelfinger senkrecht zu Daumen und Zeigefinger steht. Ohne Knochenbruch geht das nur auf eine bestimmte Art: Daumen nach oben, Zeigefinger nach vorn, Mittelfinger nach links. Der Daumen repräsentiert  $\vec{a}$ , der Zeigefinger  $\vec{b}$ , der Mittelfinger  $(\vec{a} \times \vec{b})$ .

3.  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ , mit  $\varphi : \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$ .

$\varphi : \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$  bedeutet:  $\varphi$  (phi) ist der Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

## Rechenregeln

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad \text{Kommutativgesetz gilt nicht !!!}$$

$$(c\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (c\vec{b}) = c(\vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{Assoziativgesetz gilt wie üblich}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{d} = \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{d} \quad \text{Distributivgesetz gilt wie üblich}$$

Nun kümmern wir uns um das handwerkliche. Wie berechnet man ein Kreuzprodukt? Es gibt zwei Methoden. Eine offizielle, die sehr umständlich ist und eine andere, die in die Rubrik *quick and dirty* fällt. Die Ergebnisse beider Methoden sind natürlich gleich.

Es gelte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

## Formales Berechnen des Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Wir wollten doch nur ein Kreuzprodukt ausrechnen und jetzt das? Wir sehen eine Determinante, die senkrechten Striche sagen uns das. In der ersten Zeile stehen unsere drei Einheitsvektoren in alphabetischer Reihenfolge. In der zweiten Zeile steht unser erster Spaltenvektor als Zeile, darunter der zweite Spaltenvektor.

Wir prägen uns folgendes einfaches Vorzeichenschema ein:

$$\begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ \ominus & \oplus & \ominus \\ \oplus & \ominus & \oplus \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \oplus & \ominus \\ \ominus & \oplus \end{vmatrix}$$

Dann entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile.

Wir streichen in der Determinante die erste Zeile (nach der entwickeln wir). Nur diese Zeile des Vorzeichenschemas gilt jetzt für uns. Dann streichen wir vorübergehend die erste Spalte. Wir suchen im Vorzeichenschema das Vorzeichen des zweimal gestrichen  $\vec{i}$  und schreiben es als Faktor hin. Dahinter kommt die Unterdeterminante aus den nicht gestrichenen Elementen.

Als nächstes streichen wir die zweite Spalte.  $\vec{j}$  steht im 'Fadenkreuz'. Diese Position

bekommt gemäß Schema ein Minuszeichen. Wir schreiben  $-\vec{j}$  an und ergänzen die Unterdeterminante aus erster und letzter Spalte.

Und noch einmal mit gestrichener dritter Spalte, wieder mit einem Pluszeichen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = +\vec{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Tolle Nummer, jetzt haben wir nicht eine, sondern drei Determinanten. Die sind aber kleiner, sie sind von der Dimension  $2 \times 2$ . Die können wir direkt ausmultiplizieren und zwar mit der gleichen Vorgehensweise. Wir entwickeln nach der ersten Zeile. Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z - a_z b_y$$

Der im Beispiel weggelassene Vorfaktor  $\vec{i}$  sagt uns: „Schreib das in die obere, die  $x$ -Position des Ergebnisvektors“. Denn es gilt

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir fassen zusammen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

### Quick and dirty

Wir schreiben den ersten Vektor zwei mal untereinander, rechts daneben den zweiten genauso. Anschließend streichen wir die erste und die letzte Zeile und multiplizieren wie eben bei den  $2 \times 2$  Determinanten drei mal über Kreuz. Das schöne dabei ist, dass das unerwartete Minuszeichen vor  $\vec{j}$  nicht berücksichtigt werden muss, es kommt von alleine.

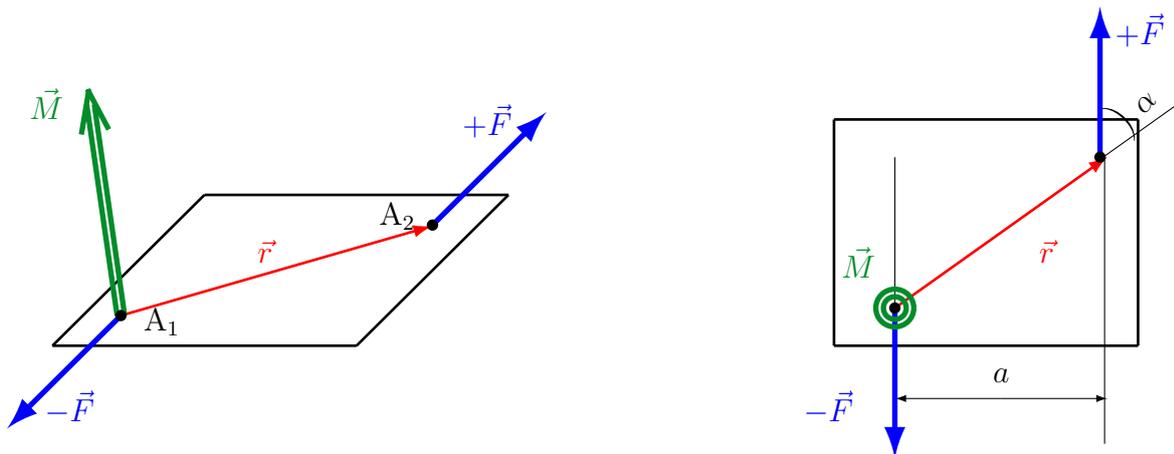
$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ \diagup \end{array} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$

Probieren Sie es aus. Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ +4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} +8 \\ +2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ey – machen! Kommt in der Klausur dran. Das mit den Vorzeichen geht leicht schief.

## Zurück zum Momentenvektor



Eigenschaften des Momentenvektors  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  bzw. des zugehörigen Kräftepaars

$$-\vec{F}[A_1] \parallel \vec{F}[A_2]$$

1.  $\vec{M}$  steht senkrecht auf der von  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  aufgespannten Ebene. Er wird mit einem Doppelpfeil dargestellt.
2.  $M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha = \pm F \cdot a$
3. Liegt das Kräftepaar in der  $x$ - $y$ -Ebene, so hat  $\vec{M}$  die Gestalt

$$(I.6) \quad \vec{M} = M \cdot \vec{k}$$

mit

$M$  : Betrag des Momentenvektors zuzüglich ggf. Vorzeichen

$\vec{k}$  : Einheitsvektor in  $z$ -Richtung

Es gilt

$$(I.7) \quad \begin{aligned} M &= +|\vec{M}|, \text{ sofern } 0^\circ < \alpha < 180^\circ \\ M &= -|\vec{M}|, \text{ sofern } 180^\circ < \alpha < 360^\circ \end{aligned}$$

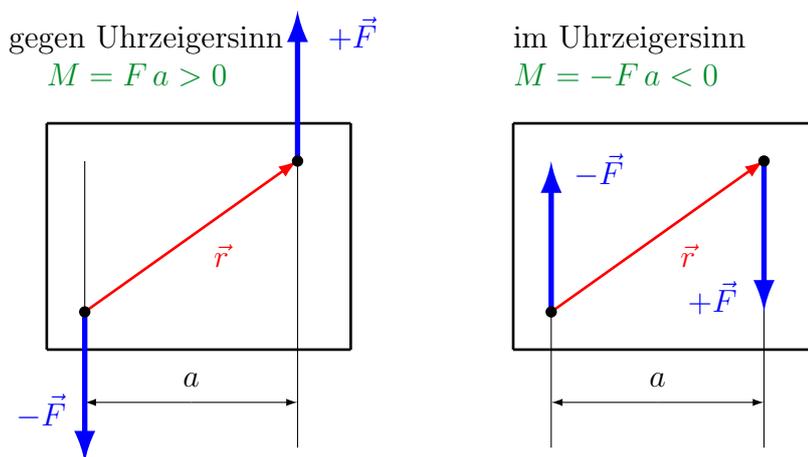
Diese Vorzeichenregelung ist zwar mathematisch korrekt (der Sinus wird zwischen  $180^\circ$  und  $360^\circ$  negativ), gut anwendbar ist diese Vorzeichenregelung hingegen nicht. Wir werden noch etwas praktikables erfinden.

4. Das Moment  $M$  und der Momentenvektor  $\vec{M}$  haben die Einheit Nm (Newton-Meter).
5. Kräftepaare dürfen beliebig in der Ebene verschoben werden, sofern ihr Moment  $M$  (Betrag und Drehsinn = Vorzeichen) erhalten bleibt. D. h. der zugehörige Momentenvektor  $\vec{M}$  darf beliebig parallel verschoben werden. Bei Kräften ist das nicht zulässig, die dürfen nur in Längsrichtung (entlang der Wirkungslinie) verschoben werden.
6. Die Momente zweier Kräftepaare in einer Ebene addieren sich algebraisch.

$$\text{Wenn } \vec{M}_1 \parallel \vec{M}_2, \text{ dann } \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \quad \text{oder} \quad M = M_1 + M_2.$$

### Einfache Vorzeichenregel für ebene Fälle

Liegt das Kräftepaar in der  $x$ - $y$ -Ebene, so gilt folgende Regel: Ein Moment oder ein Kräftepaar, das eine Drehbewegung gegen den Uhrzeigersinn anstrebt, ist positiv. Ein Moment oder ein Kräftepaar, das eine Drehbewegung mit dem Uhrzeigersinn anstrebt, ist negativ.



Bei ebenen Problemen werden wir auf das Kreuzprodukt verzichten und stattdessen formulieren:

Moment ist gleich  $\pm$  Kraft  $F$  mal Hebelarm  $a$ .

Wobei der Hebelarm der Abstand zwischen den beiden parallelen Wirkungslinien ist. Das Vorzeichen wird über den Drehsinn festgelegt.

## Zusammenfassung von $N$ Kräften in einem beliebigen Punkt

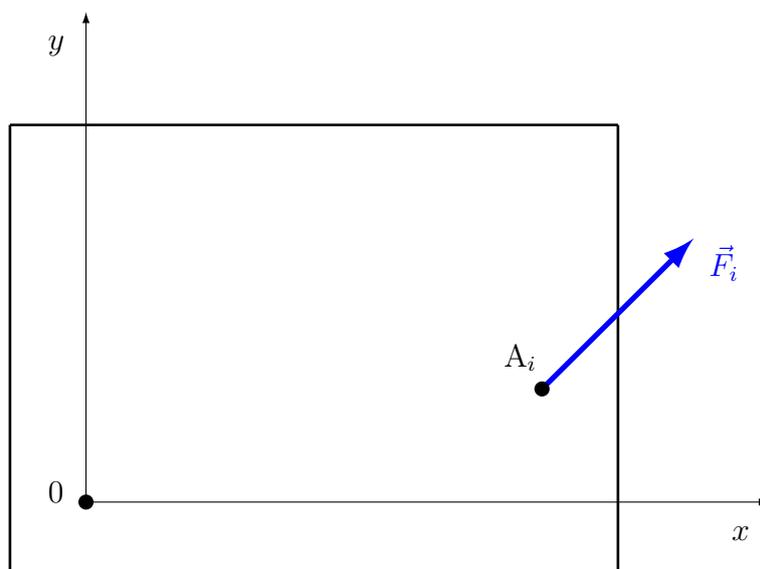
Wir befinden uns wieder an der Stelle, an der wir Kräfte mit verschiedenen Kraftangriffspunkten am ausgedehnten Körper zu einer Resultierenden zusammenfassen wollen. Wir stellten fest, dass das nicht immer geht. Unsere erste Vermutung war, dass nur ein seltener Sonderfall zur neuen physikalischen Realität 'Moment' führt. Gleich werden wir sehen, dass das Auftauchen von Momenten der Regelfall ist.

Wir wollen nicht mühsam und trickreich Kräfte längs verschieben, mit Hilfskräften  $\vec{H}$  jonglieren um einen gemeinsamen Kraftangriffspunkt zu konstruieren, was – wie wir wissen – auch mal schief gehen kann. Wir wollen uns selbst einen willkürlichen Punkt definieren, dort sollen alle Kräfte vereint sein, so dass wir die Resultierende ausrechnen können. Das läuft auf eine erlaubte Längsverschiebung und auf eine verbotene Parallelverschiebung von Kräften hinaus.

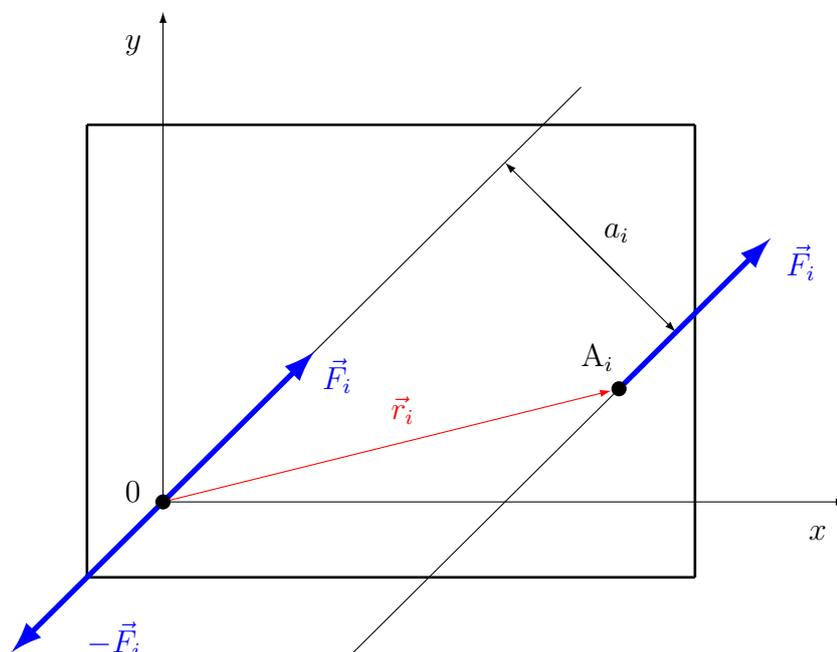
Zur Parallelverschiebung holen wir uns eine Sondererlaubnis, indem wir die Momentenwirkung der ursprünglichen Kraft erfassen.

Stellvertretend für alle  $N$  Kräfte wird die Kraft  $\vec{F}_i$  am Kraftangriffspunkt  $A_i$  betrachtet, die wir in den von uns frei gewählten Punkt  $0$  verlagern wollen.

Ausgangslage:



Wir fügen an dem von uns willkürlich festgelegten Punkt 0, an dem zufällig unser Koordinatensystem entspringt ein parallel liegendes Gleichgewichtssystem hinzu, das in Summe 0 ist, also nichts verfälscht.



Also  $\vec{F}_i[A_i]$  ist gleichwertig mit

1. einer Kraft  $\vec{F}_i[0]$     **und**
2. einem Moment (Kräftepaar)  $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  bzw.  $M_i = \pm a_i F_i$

Und schon taucht unser 'seltene Sonderfall' ständig auf. Zusatzfrage: Welches der beiden Vorzeichen  $\pm$  gilt in diesem Bild?

Allgemein gilt: Die Zusammenfassung von  $N$  Kräften in einem beliebigen Punkt ergibt

$$(I.8) \quad \begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i && \text{in beliebigem Punkt} \\ \vec{M}_R &= \sum_{i=1}^N \vec{M}_i && \text{um diesen Punkt} \end{aligned}$$

Vereinfachende Begriffsbestimmung:

Das Moment einer Kraft um einen Bezugspunkt  
ist  $\pm$  Kraftbetrag mal Abstand der  
Wirkungslinie vom Bezugspunkt.

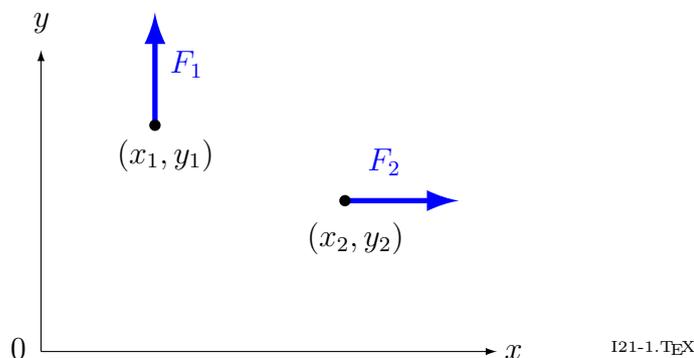
Kurz: **Moment ist gleich  $\pm$  Kraft mal Hebelarm**

■

### 2.1.1. Übung, zwei Kräfte im KS

Gegeben:

$$x_1 = 1,5 \text{ m}, \quad y_1 = 3 \text{ m}, \quad x_2 = 4 \text{ m}, \quad y_2 = 2 \text{ m}, \quad F_1 = 10 \text{ N}, \quad F_2 = 20 \text{ N}.$$



Gesucht: Resultierende Kraft im Punkt 0, dazugehöriges Moment um den Punkt 0.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

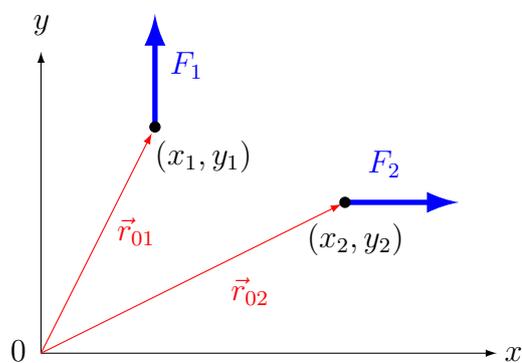
Dies gilt für den Punkt 0, wie auch für alle anderen Punkte.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Momentenwirkung der Kräfte, bezogen auf den Punkt 0 gilt:

$$\vec{M}_{1[0]} = \vec{r}_{01} \times \vec{F}_1, \quad \vec{M}_{2[0]} = \vec{r}_{02} \times \vec{F}_2, \quad \vec{M}_{[0]} = \vec{M}_{1[0]} + \vec{M}_{2[0]}$$

Wir benötigen die Ortsvektoren  $\vec{r}_{01}$ ,  $\vec{r}_{02}$ . Der Doppelindex bei  $\vec{r}_{01}$  beschreibt, dass der Ortsvektor vom Punkt 0 zum Punkt 1 zeigt (woher – wohin).



$$\vec{r}_{01} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{02} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

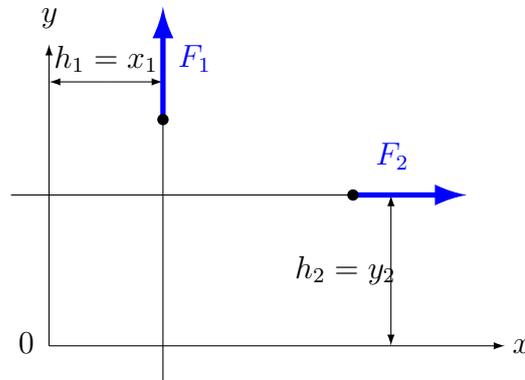
Nun berechnen Sie die beiden Kreuzprodukte mit einer Methode Ihrer Wahl. Bitte mit Formelzeichen, nicht mit Zahlen. Jede Wette, Sie nehmen *quick and dirty*, was vollkommen ok ist. Ein gutes Pferd springt nur so hoch, wie es muss. Achten Sie bitte auf die richtige Reihenfolge beim Kreuzprodukt.

$$\vec{M}_{1[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 F_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{M}_{2[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_2 F_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 F_1 - y_2 F_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{M}_{[0]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix} \text{ Nm.}$$

Bei diesem ebenen Problem können wir auch eine einfachere Methode anwenden, die wir, wenn immer möglich, bevorzugen werden.

Wir verabschieden uns von allen vektoriellen Darstellungen. Stattdessen gehen wir mit der Methode 'Kraft mal Hebelarm' vor. Dabei dürfen wir Kräfte längs ihrer hier gepunkteten Wirkungslinien verschieben. Der Abstand der Wirkungslinie vom Bezugspunkt (hier 0) ist der Hebelarm  $h$ .



Die Vorzeichen, die das Kreuzprodukt liefert, müssen wir selbst herausfinden. Wir haben ein  $x-y$ -Koordinatensystem, in dem gilt, Momente gegen den Uhrzeigersinn sind positiv. Falls Ihnen die Vorstellung fehlt, machen Sie anfangs folgendes auf einer Papierskizze: Tippen Sie mit dem linken Zeigefinger auf den Punkt 0. Mit dem rechten Zeigefinger tippen Sie auf die betrachtete Kraft und bewegen ihn in Pfeilrichtung. Das Papier möchte sich um den Punkt 0 drehen. Der Drehsinn liefert das Vorzeichen.

Die Kraft  $F_1$  dreht gegen den Uhrzeigersinn (+) am Hebelarm  $h_1$ ,

$$M_1 = +F_1 h_1 = +F_1 x_1.$$

Die Kraft  $F_2$  dreht im Uhrzeigersinn (-) am Hebelarm  $h_2$ ,

$$M_2 = -F_2 h_2 = -F_2 y_2.$$

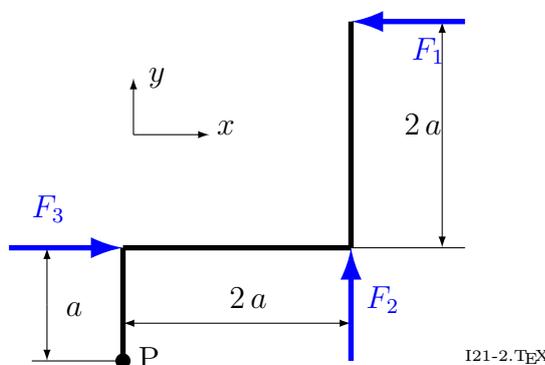
$$M_1 = +15 \text{ Nm}, \quad M_2 = -40 \text{ Nm}, \quad M = M_1 + M_2, \quad M = -25 \text{ Nm}$$

Stellen Sie sich auf folgendes ein: Bei räumlichen Problemen benutzen wir das Kreuzprodukt (kann in der Klausur drankommen), bei ebenen Problemen verwenden wir die '± Kraft mal Hebelarm' Methode (kommt ständig dran, so sicher wie das Amen in der Kirche). ■

### 2.1.2. Übung, flacher Rahmen mit drei Kräften

Ein Rahmen wird durch drei Kräfte belastet.

$$F_1 = F_2 = 2F, \quad F_3 = F, \quad a.$$



Gesucht: Resultierende Kraft im und resultierendes Moment um den Punkt P.

Wir sehen ein ebenes Problem, weshalb wir mit der '± Kraft mal Hebelarm' Methode beginnen. Zunächst aber die Resultierende.

$$\left. \begin{array}{l} R_x = F_3 - F_1 = -F \\ R_y = F_2 = 2F \\ R_z = 0 \end{array} \right\} \vec{R} = \begin{pmatrix} -F \\ 2F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für das gesamte resultierende Moment gilt

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3$$

$$M_R = +3aF_1 + 2aF_2 - aF_3$$

$$M_R = Fa(6 + 4 - 1) = 9Fa$$

Da wir noch neu im Geschäft sind, berechnen wir das resultierende Moment noch einmal mit Hilfe des Kreuzprodukts. Hierzu müssen alle Beteiligten als Spaltenvektor angetragen werden.

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -2F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2F \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_R = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

Los los keine Müdigkeit.

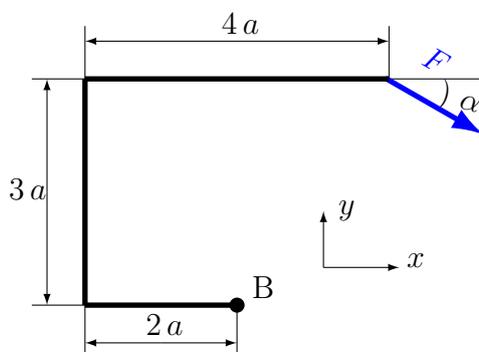
$$\vec{M}_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6Fa + 4Fa - Fa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9Fa \end{pmatrix}$$

■

### 2.1.3. Übung, Rahmen mit schräger Kraft

Ein Rahmen wird durch eine Kraft belastet. Gegeben:

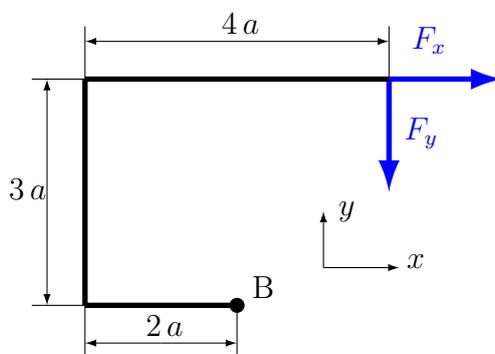
$$F, \alpha, a.$$



121-3.TEX

Gesucht: Resultierendes Moment der Kraft  $F$  um den Punkt B.

Wir sehen ein ebenes Problem, weshalb wir mit der Hebelarmsuche anfangen. Dabei stellen wir fest, dass das alles andere als trivial ist. Wir verabschieden uns von der Idee, den Hebelarm zur schiefen Kraft zu finden und wenden eine List an. Wir zerlegen die Kraft  $F$  in seine Komponenten. Für diese sind die Hebelarme dann ganz leicht zu finden.



Zur Erinnerung: Wenn die Kräfte nur mit  $F$  bezeichnet werden, also nicht mit  $\vec{F}$ , so sind Vorzeichen in der Skizze verboten. Bei  $F_y$  könnte man ins Grübeln geraten: zeigt doch nach unten, gegen die  $y$ -Richtung, muss da kein Minus hin? Nein. Das machen wir zu einem anderen Zeitpunkt.

Es gilt

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \sin \alpha$$

Vorsicht: scheinbarer Widerspruch zu

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ -F \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren beziehen sich auf das Koordinatensystem, daher das Minuszeichen. In der Skizze steht hingegen, die Kraft heißt  $F_y$  (ohne Vorzeichen) und die Kraftrichtung, die später bezüglich Vorzeichen berücksichtigt werden muss, ist der Pfeilrichtung zu entnehmen. Erst beim Aufstellen eines Vektors (s.o.) oder beim Aufsummieren mit anderen Kräften (s. letzte Übungsaufgabe  $F_3 - F_1$ ) werden die Minuszeichen – wo nötig – vergeben. Erst dann orientieren wir uns am Koordinatensystem.

$F_x$  hat den Hebelarm  $3a$  und dreht im Uhrzeigersinn ( $-$ ),  $F_y$  hat den Hebelarm  $2a$  und dreht auch im Uhrzeigersinn ( $-$ ).

$$M_{[B]} = -F_x 3a - F_y 2a$$

bzw.

$$M_{[B]} = -Fa(3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha)$$

Versuchen Sie mit dem Kreuzprodukt auf das gleiche Ergebnis zu kommen.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ -F \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

## 2.2. Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte mit verschiedenen Kraftangriffspunkten

Bei den Übungsaufgaben mit den Ordnungsnummern 2.1.n hatten wir keine Gleichgewichtsbedingungen angewandt. Es ging nur um das Berechnen von resultierenden Kräften und Momenten bezüglich eines bestimmten Punktes. Nun greifen wir das Grundprinzip der Statik wieder auf, die Gleichgewichtsbedingungen.

### Ebenes Kräftesystem

Bei einem ebenen Kräftesystem an einem starren Körper herrscht Gleichgewicht, wenn gilt

$$(I.9) \quad \vec{R} \equiv 0 \quad \text{und} \quad M = \sum_{i=1}^N M_{i[\ ]} \equiv 0$$

Das Momentengleichgewicht ist skalar (nicht vektoriell) angeschrieben, da ausschließlich Momentenvektoren auftreten können die auf der Ebene der Kräfte senkrecht stehen. Eine vektorielle Schreibweise ist natürlich möglich, jedoch überflüssig.

In Komponentenschreibweise:

$$(I.10) \quad \sum_{i=1}^N X_i \equiv 0 \quad \sum_{i=1}^N Y_i \equiv 0 \quad \sum_{i=1}^N M_{i[\ ]} \equiv 0.$$

In die leere eckige Klammer bei den Momenten ist der Bezugspunkt einzutragen. Gleichung (I.10) wird Kräfte- und Momentengleichgewicht bezeichnet. Abgekürzt KG und MG.

KG und MG sind unser Kerngeschäft für den Rest des Semesters.

### Räumliches Kräftesystem

Bei räumlichen Systemen gilt ganz ähnlich (Summengrenzen  $i = 1$  bis  $N$  weggelassen)

$$(I.11) \quad \begin{aligned} \sum X_i &\equiv 0, & \sum M_x &\equiv 0 \\ \sum Y_i &\equiv 0, & \sum M_y &\equiv 0 \\ \sum Z_i &\equiv 0, & \sum M_z &\equiv 0 \end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\vec{R} \equiv \vec{0}, \quad \vec{M}_R \equiv \vec{0}.$$

Hinweis:  $\sum M_x \equiv 0$  bedeutet 'Summe aller Momente um die  $x$ -Achse ist identisch Null'

## 2.3. Körpersysteme

Vorgegeben seien starre Körper, die untereinander irgendwie verbunden sind (Gelenk, Lagerung, Führung, Fügung).

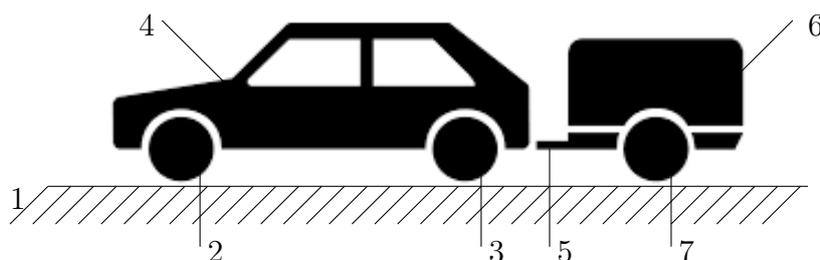
**Gelenk:** Denken Sie an ein Bolzengelenk (eben) oder an die Anhängerkupplung eines Autos mit Anhänger (räumlich).

**Lagerung:** Denken Sie an die Auflager von Brücken oder an Wälz- und Gleitlager von Wellen.

**Führung:** Denken Sie an die Schwalbenschwanzführung eines Reitstocks auf einer Drehbank oder des beweglichen Teils eines Schraubstocks.

**Fügung:** Jedwede Verbindung zwischen zwei Körpern durch Schrauben, Nieten oder durch das Schweißen, Löten, Kleben.

Gefragt ist nach den Kräften und Momenten (Kraftvektor und Momentenvektor), die bei Belastung eines oder mehrerer Teilkörper zwischen den Teilen herrschen.



## 2.4. Die Schnittmethode und ihre Anwendung

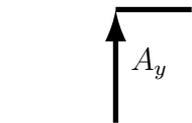
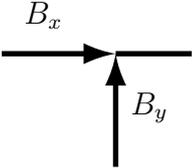
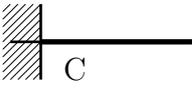
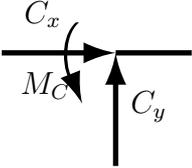
Zerschneiden des Systems in geeignete Teilkörper. Bewertung der Lager- und Schnittstellen. Anbringen von Kraft- und Momentenvektoren an den Schnittstellen (häufig komponentenweise).

Berücksichtigung des Gegenwirkungsprinzips.

Anschließend für jeden vollständig freigeschnittenen Teilkörper Kräfte- und Momentengleichgewicht aufstellen.

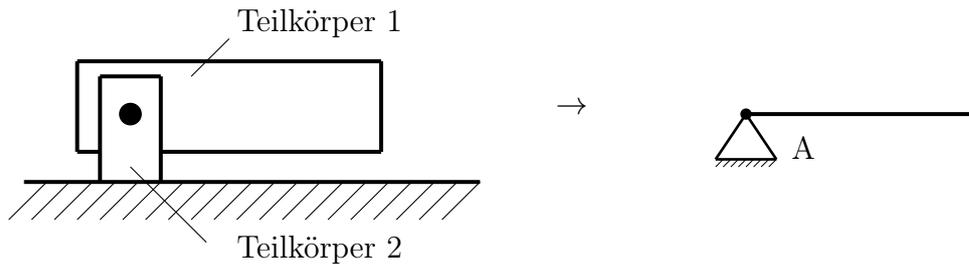
Für die Bewertung von Lagerungen gibt es das folgende Hilfsmittel. Dieses Blatt ist in der Klausur ein zusätzliches zugelassenes Hilfsmittel. Abgekürzt wird es genannt

## der Lagerzettel.

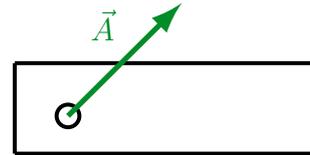
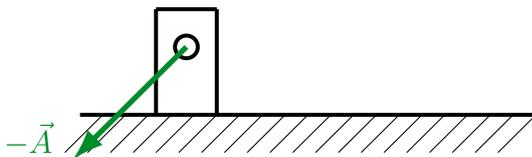
| <b>Auflager linienförmiger Tragwerke, zugehörige Lagerreaktionen</b>                  |            |   |                          |                                   |
|---|------------|---|--------------------------|-----------------------------------|
| Symbol  | Wertigkeit | Schnittbild   | Bewegungsmöglichkeit     | Randbedingung(en)*                |
|  A   | einwertig  |    | Drehung und Verschiebung | $w(x = a) = 0$                    |
|  B   | zweiwertig |   | Drehung                  | $w(x = a) = 0$                    |
|  C | dreiwertig |  | keine                    | $w(x = a) = 0$<br>$w'(x = a) = 0$ |
| * für die Variable $a$ ist die tatsächliche $x$ -Position des Lagers einzusetzen      |            |   |                          |                                   |
| Prof. Dr.-Ing. JOACHIM VENGHAUS   |            |   | Technische Mechanik      |                                   |



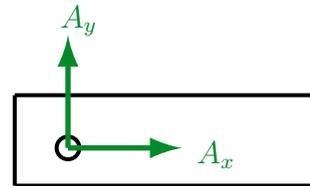
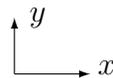
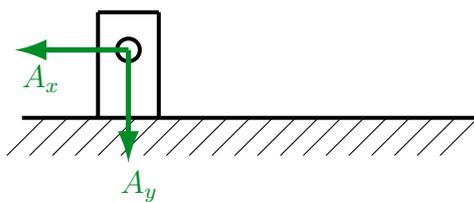
Beispiel für Starrkörperverbindungen: Bolzgelenk



Schnitt



oder gleichbedeutend



Grundsätzlich: Gegenwirkende Vektoren mit Vorzeichen versehen (z.B.  $\vec{A}$ ,  $-\vec{A}$ ). Bei der Komponentendarstellung (z.B.  $A_x$ ,  $A_y$ ) dürfen keine Vorzeichen gesetzt werden. Pfeilrichtung und Bezeichnung (z.B.  $A_x$ ,  $A_y$ ) gemeinsam beschreiben die Kraftkomponente.

Ein negativer Zahlenwert bei einer Kraftkomponente besagt dann: „Die Kraft wirkt nicht wie eingezeichnet, sondern gegenan“.

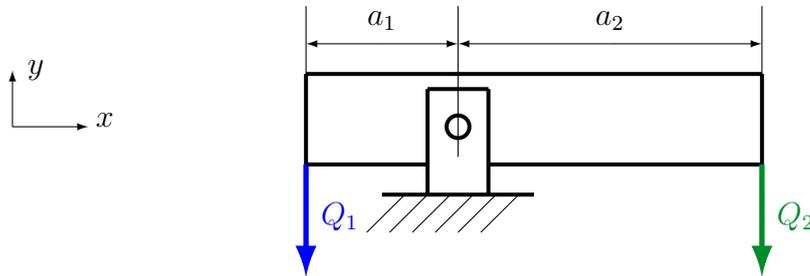
Beim Antragen von Schnittkräften in Komponentenform ist das ein unschätzbare Vorteil. Wir müssen nicht 'ahnen' wohin eine Kraftkomponente wirklich wirkt (links oder rechts, oben oder unten). Wir können die Kraftkomponente am ersten Schnittufer anbringen wie wir wollen. Am anderen Schnittufer sind wir jedoch festgelegt, das Newtonsche Gegenwirkungsprinzip muss erfüllt werden.

Sollte am Ende einer Berechnung ein negativer Zahlenwert auftauchen ist das kein Schönheitsfehler! Jedoch dürfen wir in solchen Fällen nachträglich auf gar keinen Fall die Pfeilrichtung ändern.

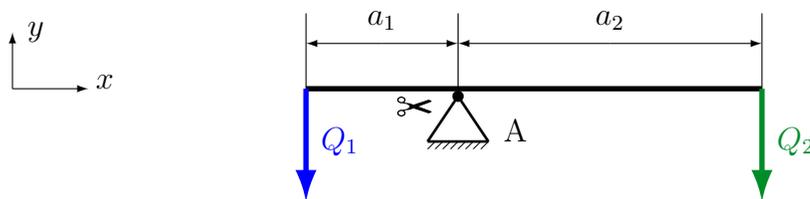
Noch etwas: Ob eine Kraft mit der Spitze drückt oder mit dem Fuß zieht ist unerheblich. Kräfte dürfen längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

## Beispiele für die Anwendung der Schnittmethode

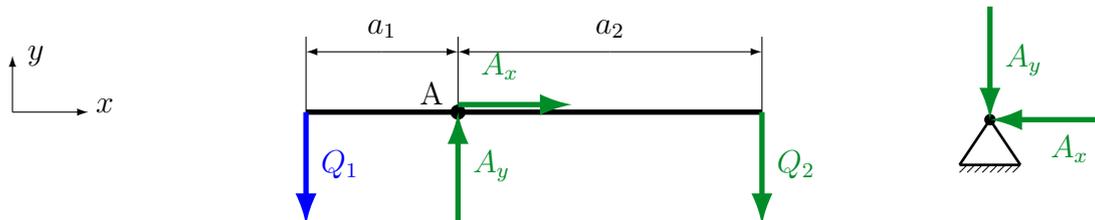
Gegeben:  $Q_1$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , gesucht  $Q_2$ .



Dies ist gleichbedeutend mit



Wir schneiden das Lager ab ✂ und ersetzen es durch Lagerreaktionen, hier: zweiwertiges Lager.



Wir geben den Lagern willkürliche Buchstaben als Bezeichnung, beginnend mit A. Demzufolge heißen die Lagerkräfte in diesem Fall  $A_x$ ,  $A_y$ . Die Richtung der grünen Pfeile am Waagebalken ( $A_x$  nach rechts,  $A_y$  nach oben) ist willkürlich festgelegt. Eine oder beide Kräfte andersherum einzuzeichnen ist genauso zulässig.

Am vollständig freigeschnittenen Waagebalken wenden wir die Gleichgewichtsbedingungen für ebene Fälle an.

Das abgetrennte Lager ist nicht vollständig freigeschnitten. Dies ist erkennbar an der Schraffur. Sie besagt, dass der 'Lagerbock' noch mit dem Rest der Welt verbunden ist.

An solchen Teilen mit Schraffur ist es unsinnig, Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen. Beim nächsten mal werden wir solche Teilbilder gleich weglassen. Ich wollte Ihnen diesmal nur daran zeigen, dass das Newtonsche Gegenwirkungsprinzip angewandt wurde. Am zweiten Schnittufer, das wir betrachten, haben wir keine freie Wahl mehr. Hier muss alles umgekehrt zum ersten Schnittufer sein.

Wir wählen den Punkt A als Bezugspunkt für die Momente.

Künftig wählen wir immer den Punkt als Bezugspunkt, an dem die meisten unbekannt (grünen) Kräfte angreifen. Die haben dann keinen Hebelarm und tauchen im Momentengleichgewicht nicht auf. So schaffen wir uns günstige Gleichungssysteme.

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = A_x$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = -Q_1 + A_y - Q_2$$

$$(3) \quad \sum M_{[A]} \equiv 0 = Q_1 a_1 - Q_2 a_2$$

Das Momentengleichgewicht vorgelesen lautet wie folgt: Die Summe aller Momente bezüglich Punkt A ist identisch Null. Die Kraft  $Q_1$  dreht am Hebelarm  $a_1$  gegen den Uhrzeigersinn (positiv), die Kraft  $Q_2$  dreht am Hebelarm  $a_2$  im Uhrzeigersinn (negativ).

Durch unsere Farbmarkierungen ist die Vorgehensweise sonnenklar

$$(1) \rightarrow A_x; \quad (3) \rightarrow Q_2; \quad Q_2 \text{ in } (2) \rightarrow A_y.$$

$$A_x = 0$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{a_1}{a_2}$$

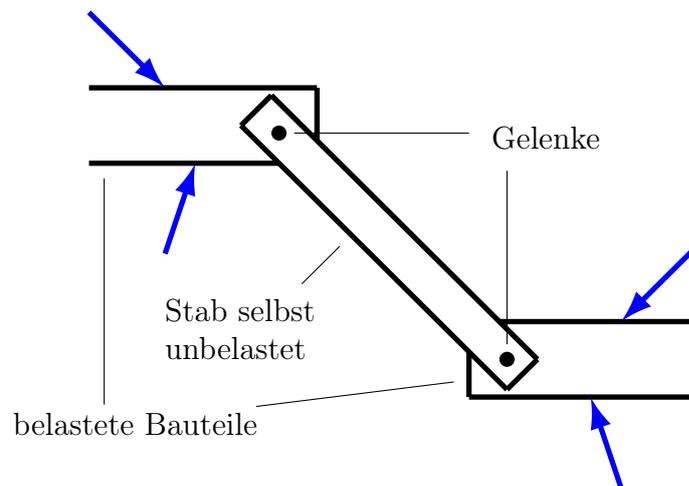
$$A_y = Q_1 \left( 1 + \frac{a_1}{a_2} \right).$$

Betrachten wir kurz diese Ergebnisse. Die Lagerkraft  $A_x$  ist 0. Das heißt, in horizontaler Richtung muss unser Lager keine Kräfte aufnehmen. Aus diesem Grund ist es müßig, zu überlegen, ob wir die Kraft  $A_x$  am Waagebalken 'richtigerum' eingezeichnet haben. Die Kraft  $A_y$  ist erkennbar positiv. Das bedeutet, dass sie tatsächlich so wirkt, wie eingezeichnet. Am Waagebalken drückt sie nach oben, am Lagerbock nach unten. Hätten wir  $A_y$  anders eingezeichnet, hätten wir ein führendes Minuszeichen bekommen. Probieren Sie es aus.

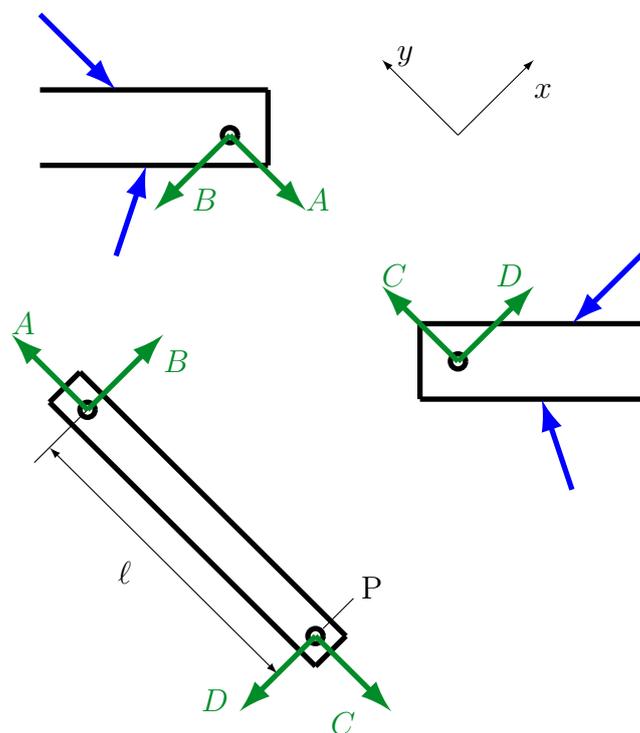
Am Ergebnis für  $Q_2$  sehen wir das klassische Hebelgesetz, das jeder Einbrecher beherrscht, der mit einem Kuhfuß ein Fenster aushebelt. Oder „gewaltig ist des Schlossers Kraft, wenn er mit dem Hebel schafft“.

## Pendelstütze

Eine Pendelstütze ist ein 5 beidseitig gelenkig gelagerter Stab, der selbst unbelastet ist.



Es stellt sich die Frage nach der Kraftübertragung im Stab. Hierzu schneiden wir die beiden Bolzengelenke frei.



Im Rahmen einer gewissen Vorahnung haben wir ein Koordinatensystem gewählt, das an den Verlauf der Pendelstütze angepasst ist.

Kräfte- und Momentengleichgewicht an der Pendelstütze

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = B - D$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = A - C$$

$$(3) \quad \sum M_{[P]} \equiv 0 = -B \ell$$

Aus Gleichung (3) folgt  $B = 0$ , da Pendelstützen eine Länge  $\ell \neq 0$  haben müssen. Mit  $B = 0$  und Gleichung (1) folgt, dass auch  $D = 0$  ist. Es bleibt die Erkenntnis

$$A = C.$$

Das heißt: Eine Pendelstütze kann nur Kräfte in Stablängsrichtung übertragen.

Hierzu gibt es eine überaus korrekte aber komplizierte Beschreibung, da die Pendelstütze auch krumm wie ein Bumerang sein darf.

Oder genauer: Eine Pendelstütze kann nur Kräfte in Richtung der Verbindungslinie der Gelenkmitten übertragen.

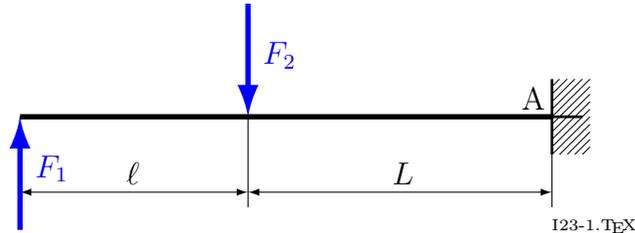
Wenn wir eine Pendelstütze erkennen, ersetzen  
wir sie durch Schnittkräfte in Stablängsrichtung.

Pendelstützen sind wie Seile, an denen nur beidseitig gezogen oder auch (abweichend von Seilen) beidseitig gedrückt werden kann. Das Erkennen von Pendelstützen erspart viel Arbeit. ■

### 2.4.1. Übung, dreiwertig gelagerter Balken

Ein einseitig eingespannter Balken wird von zwei Kräften belastet. Er befindet sich im Gleichgewicht. Gegeben:

$$F_1, \quad F_2, \quad \ell, \quad L.$$

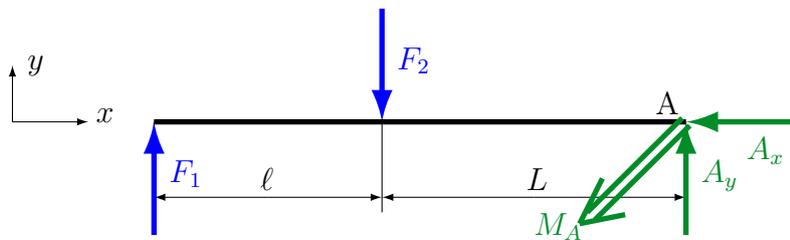


Gesucht: Alle Lagerreaktionen in A.

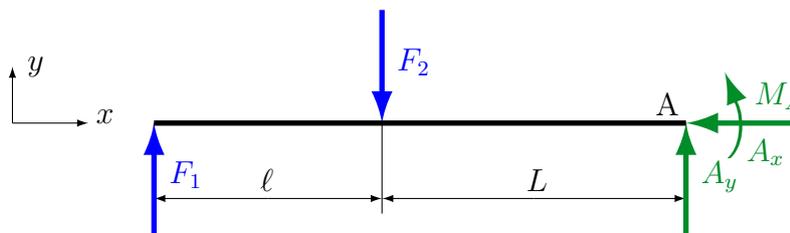
Was sind Lagerreaktionen? Es sind die Lagerkräfte und – sofern vorhanden – die Lagermomente. Lagerreaktion ist der Oberbegriff zu Lagerkräften und Lagermomenten, ohne zu verraten, ob es z.B. Lagermomente tatsächlich gibt.

Freischneiden.

Wir erkennen ein dreiwertiges Lager am rechten Balkenende. Gemäß Lagerzettel ersetzen wir es durch die Kräfte  $A_x$ ,  $A_y$  und ein Moment  $M_A$  (Buchstaben A, weil das Lager A heißt). Die Richtung eines jeden grünen Pfeils ist frei wählbar. Es gibt also sechs verschiedene Möglichkeiten, die alle zulässig sind. Natürlich rechne ich nur eine von den sechs Möglichkeiten vor – diese. Wichtig ist dabei, wir müssen keinen Ehrgeiz entwickeln, die Schnittkräfte und -momente 'richtigerum' einzuzeichnen. Gerade in diesem Beispiel werden wir sehen, dass wir gar nicht wissen können, was 'richtigerum' ist.



Bei ebenen Problemen stellen wir Momente häufig vereinfacht dar.



Um die Momentendarstellung von der einen in die andere Darstellungsform zu überführen benötigen wir die rechte Hand. Der Daumen zeigt in die Richtung des Doppelpfeils. Hier ist das die  $z$ -Richtung, aus der Zeichenebene heraus. Die gekrümmten Finger der rechten Hand zeigen die Wirkrichtung des gekrümmten Pfeils, der vereinfacht das Moment in einer ebenen Skizze darstellt.

KG und MG

$$\sum X \equiv 0 = -A_x$$

$$\sum Y \equiv 0 = F_1 - F_2 + A_y$$

$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = M_A + F_2 L - F_1 (\ell + L)$$

Sicherheitshalber wird noch einmal das Momentengleichgewicht erläutert. Wir wählen Punkt A als Bezugspunkt, da dort viele (2) unbekannte Kräfte angreifen. Die haben dann keinen Hebelarm und tauchen daher im Momentengleichgewicht nicht auf.

Ansonsten gilt: Das Moment  $M_A$  dreht gegen den Uhrzeigersinn (+), die Kraft  $F_2$  dreht bezüglich Punkt A am Hebelarm  $L$  gegen den Uhrzeigersinn (+), die Kraft  $F_1$  dreht bezüglich Punkt A am Hebelarm  $\ell + L$  im Uhrzeigersinn (-).

Die Lagerreaktionen lauten

$$A_x = 0$$

$$A_y = F_2 - F_1$$

$$M_A = F_1 (\ell + L) - F_2 L.$$

Ob die von uns gewählten Pfeilrichtungen für  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $M_A$  'richtig' sind, können wir nicht feststellen. Am deutlichsten wird es bei der Kraft  $A_y$ . Wenn  $F_2 > F_1$ , dann wirkt die Kraft  $A_y$  tatsächlich wie eingezeichnet. Wenn  $F_2 < F_1$ , würde  $A_y$  ein negatives Ergebnis bekommen. Wir würden daran erkennen,  $A_y$  wirkt nicht wie eingezeichnet, sondern umgekehrt.

Schlussfolgerung: Wir entwickeln keinen großen Ehrgeiz, Kräfte und Momente 'richtigerum' anzutragen. Wir ärgern uns auch nicht, wenn ein Ergebnis erkennbar negativ ist. Auf gar keinen Fall dürfen wir bei einem negativen Ergebnis nachträglich die Pfeilrichtung ändern. Angenommene Pfeilrichtung und Rechenergebnis gehören untrennbar zusammen.

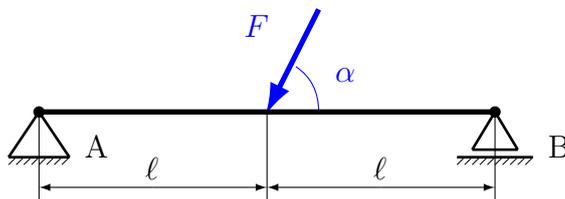
Noch etwas muss uns klar werden: Ohne ein Schnittbild ist ein Rechenergebnis nicht zu interpretieren. Es gibt daher in der Klausur für wichtige Schnittbilder einen Punkt. Rechenergebnisse, die durchaus richtig sein könnten, sind ohne Schnittbild wertlos, da nicht erkennbar ist, wie die Größen angetragen wurden.



### 2.4.2. Übung, Brücke mit schräger Kraft

Eine Brücke wird belastet. Gegeben:

$$F, \ell, \alpha.$$



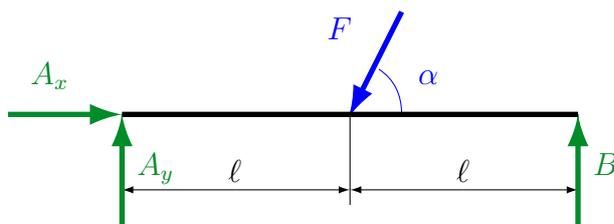
123-2.TEX

Gesucht: Alle Lagerreaktionen in A und B.

Die Realität hinter dieser Aufgabe ist ziemlich um die Ecke gedacht. Ein Auto, das von rechts nach links fährt, bremst auf Brückenmitte. So könnte die schiefe Kraft  $F$  entstehen. Das wäre allerdings Dynamik. Egal. Wir haben eine Brücke mit schiefer Kraft, ist doch wurscht, warum.

Die Brücke ist regelgerecht gebaut. Links zweiwertig, rechts einwertig gelagert. Eventuelle Wärmeausdehnungen können sich demzufolge ausgleichen, ohne dass die Brücke verspannt wird oder gar ausknickt. So baut man Brücken. Bei Eisenbahnschienen wird anders vorgegangen. Über viele Kilometer bilden die verschweißten Schienenprofile ein Kontinuum, das auf den Schwellen oder der festen Fahrbahn festgehalten wird. Im Sommer werden die Schienen gestaucht, im Winter gedehnt. Ein Ausgleich ist nicht möglich. Diese Gedanken über Spannungen und Dehnungen gehören schon zur Elastostatik (TMII), det kriejen wa späta.

Freischneiden



KG u. MG.

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum X \equiv 0 &= A_x - F \cos \alpha \\ (2) \quad \sum Y \equiv 0 &= A_y + B - F \sin \alpha \\ (3) \quad \sum M_{[A]} \equiv 0 &= -F \sin \alpha \cdot \ell + B \cdot 2\ell \end{aligned}$$

$$(1) \rightarrow A_x, \quad (3) \rightarrow B, \quad B \text{ in } (2) \rightarrow A_y.$$

$$A_x = F \cos \alpha$$

$$B \cdot 2\ell = F \sin \alpha \cdot \ell$$

$$B = \frac{F \sin \alpha \cdot \ell}{2\ell}$$

$$B = \frac{F \sin \alpha}{2}$$

$$A_y = F \sin \alpha - B$$

$$A_y = F \sin \alpha - \frac{F \sin \alpha}{2}$$

$$A_y = \frac{F \sin \alpha}{2}$$

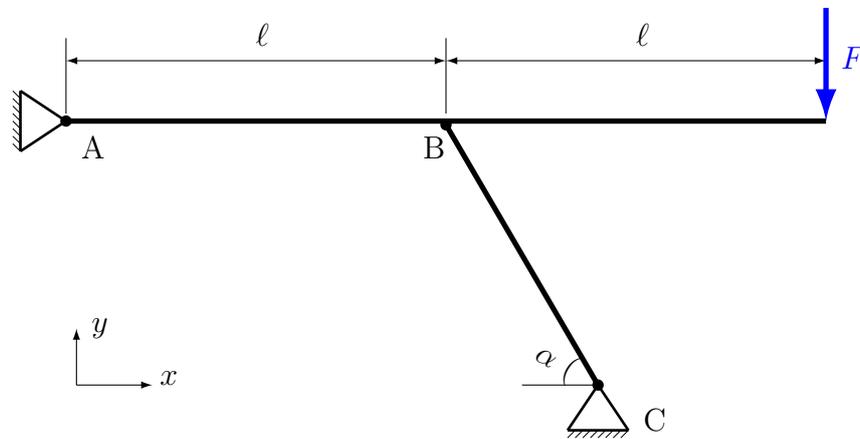
Zufällig kommen alle Lagerreaktionen ohne Minuszeichen daher. Wir haben sie 'richtig-herum' angetragen. Schön, dass es so ist, mehr nicht. Jeder einzelne Pfeil hätte auch anders herum eingezeichnet werden können, dann hätte es Minuszeichen gegeben.

Vorsicht beim Kürzen von  $\frac{\ell}{2\ell}$ . Wer ist reingefallen? Wer mit  $\frac{1}{\ell}$  weiterrechnet, macht einen sehr teuren Fehler. Er oder sie würde behaupten, manche Kräfte haben die Einheit Newton pro Meter. Das ist nicht ein bisschen falsch, das ist grottenfalsch. ■

### 2.4.3. Übung, raten Sie mal was das ist

Ein Tragwerk wird mit der Kraft  $F$  belastet. Gegeben:

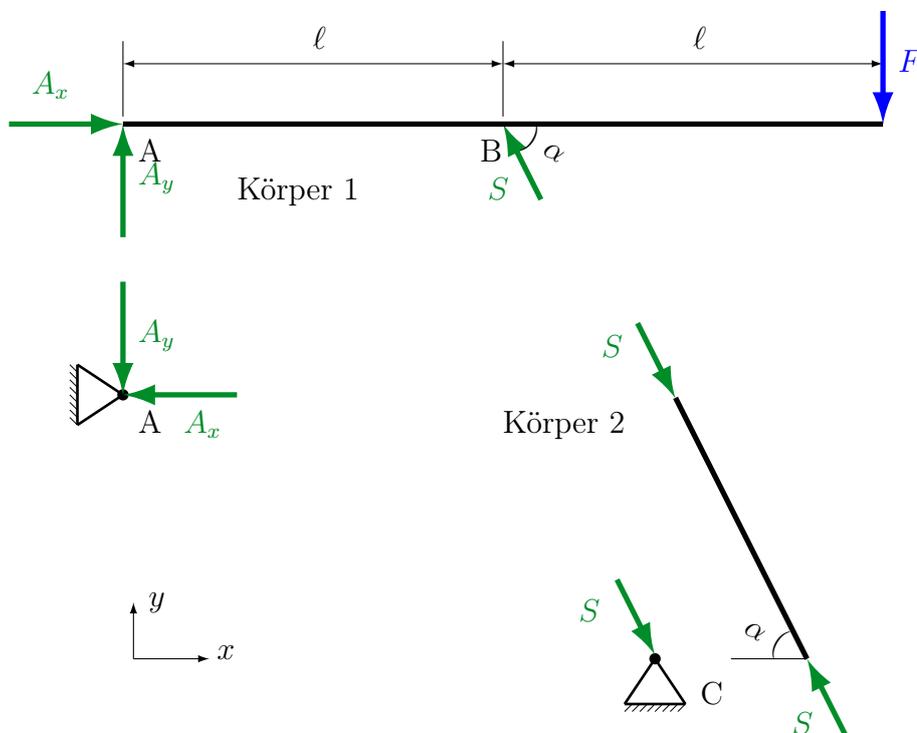
$$F = 20 \text{ kN}, \quad \ell = 2 \text{ m}, \quad \alpha = 60^\circ.$$



123-3.TEX

Gesucht: Alle Lagerreaktionen in A und C, Stabkraft  $S$  im Stab BC.

Freischneiden bei A, B und C. Hierbei erkennen wir die Pendelstütze zwischen den Lagern B und C.



Wiederholung: Pendelstützen sind beidseitig gelenkig gelagerte Stäbe, die selbst unbelastet sind. Sie werden freigeschnitten und durch Kräfte in Stablängsrichtung ersetzt. Am Stab selbst wirken beidseitig entweder Druckkräfte, wie hier oder beidseitig Zugkräfte. Zur Verdeutlichung des Newtonschen Gegenwirkungsprinzips werden hier die abgeschnittenen Lager dargestellt. Sie können gerne weggelassen werden.

Den Winkel  $\alpha$  müssen wir noch von der Lage am Lager C an die Position B übertragen (Wechselwinkel an parallelen Linien).

KG u. MG an Körper 1

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = A_x - S \cos \alpha$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = A_y + S \sin \alpha - F$$

$$(3) \quad \sum M_{[B]} \equiv 0 = -A_y \ell - F \ell$$

Den Kraftangriffspunkt einer schiefen Kraft als Momentenbezugspunkt zu wählen, ist ein starker Zauber. Das erspart uns hier Gemurkel mit Winkelfunktionen im MG.  $A_x$  hat auch bezüglich B keinen Hebelarm. Wer es nicht glaubt, verschiebe  $A_x$  entlang der Wirkungslinie. Wer routinemäßig A als Bezugspunkt wählt, kommt auf das selbe Ergebnis. Probieren Sie es aus.

$$(3) \rightarrow A_y, \quad A_y \text{ in } (2) \rightarrow S, \quad S \text{ in } (1) \rightarrow A_x.$$

$$(3) \quad A_y = -F$$

$$A_y = -20 \text{ kN}$$

$$(2) \quad S \sin \alpha = F - A_y$$

$$S \sin \alpha = 2F$$

$$S = \frac{2F}{\sin \alpha}$$

$$S = 46,2 \text{ kN}$$

$$(1) \quad A_x = S \cos \alpha$$

$$A_x = \frac{2F}{\sin \alpha} \cos \alpha = \frac{2F}{\tan \alpha}$$

$$A_x = 23,1 \text{ kN}$$

Das Erkennen von Pendelstützen ist von entscheidender Bedeutung. Auch in der Klausur. Wer reflexartig am Lagerort C zwei Kräfte gemäß Lagerzettel anträgt, muss unter erschwerten Bedingungen (nicht angepasstes Koordinatensystem) die Eigenschaften von Pendelstützen erneut herleiten. Also Augen auf beim Erfassen von TM-Aufgaben. ■

## 2.5. Statisch bestimmte und unbestimmte Lagerung

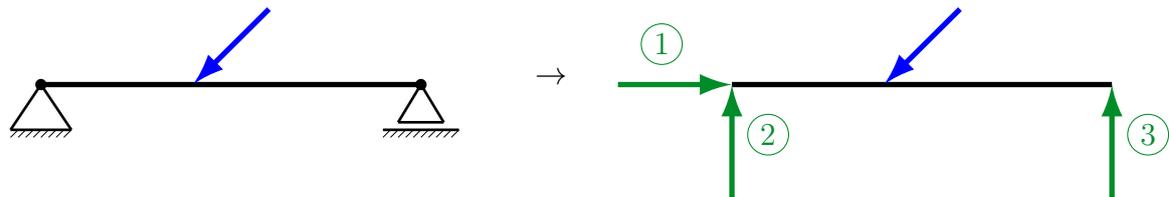
Haben Sie sich schon gewundert, dass wir immer gerade so viele Gleichungen haben, wie 'Wertigkeiten', also Anzahl der Lagerreaktionen? Das liegt daran dass wir immer eine statisch bestimmte Lagerung hatten.

**statisch bestimmt:** Berechenbarkeit von Lagerreaktionen allein durch Gleichgewichtsbedingungen.

oder

Zahl der Lagerreaktionen = Zahl der Gleichgewichtsbedingungen (Gleichungen).

Beispiel

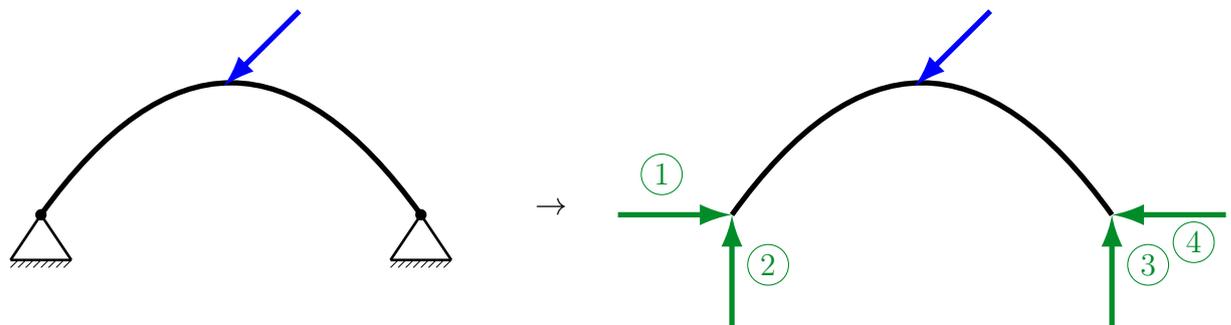


$$\sum X \equiv 0, \quad \sum Y \equiv 0, \quad \sum M_{[ \ ]} \equiv 0$$

Drei Gleichungen liefern drei Lagerreaktionen

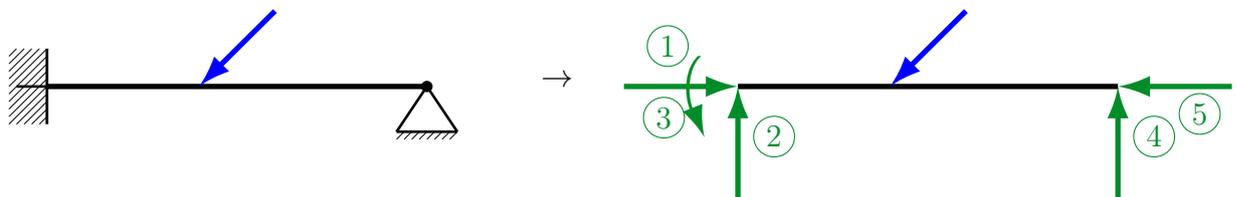
**statisch unbestimmt:** Zahl der Lagerreaktionen > Zahl der Gleichungen.

Beispiel 1



Vier Lagerreaktionen, drei Gleichungen → einfach statisch unbestimmt.

Beispiel 2



Fünf zu drei → zweifach statisch unbestimmt.

Eine Berechnung mit den Gesetzen der Statik ist **nicht** möglich. Die Verformung der Tragwerke muss berücksichtigt werden. Das ist Thema der Festigkeitslehre.

Moment! Sagt da die eine oder der andere. Wir können doch weitere Gleichungen generieren. Wir nehmen einen weiteren Bezugspunkt und schreiben ein weiteres Momentengleichgewicht an und schon haben wir eine vierte Gleichung – 4:4, Ausgleich in der Nachspielzeit. Nutzt nichts. Diese vierte Gleichung kann mit Hilfe der anderen dreien hergeleitet werden. Die vierte Gleichung ist linear abhängig und liefert keine zusätzliche Erkenntnis, der Schiri pfeift Abseits. Es bleibt dabei, wir kommen nicht weiter.

Wir müssen nur in der Lage sein, statische Unbestimmtheit zu erkennen. Ein Schnittbild zu zeichnen und den Spielstand zu erfassen ist natürlich eine Möglichkeit. Ich möchte Ihnen noch eine schnelle, extrem unwissenschaftliche Methode verraten. Sie heißt 'Rackeln an den Schraffuren'.

Beispiel 1, linkes Bild. Sie fassen eines der beiden Lager an der Schraffur und

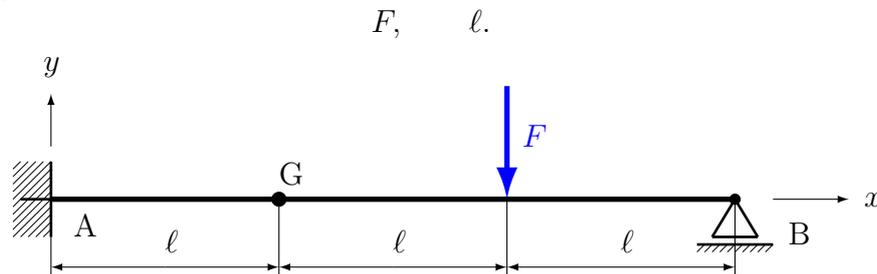
1. bewegen es auf und ab → geht, denn Punkte sind Gelenke,
2. drehen es um den Lagerungspunkt → geht, dito,
3. bewegen es nach links und rechts → geht nicht, das verbiegt den Bogen.

Daher einfach statisch unbestimmt. Versuchen Sie diese gedankliche Spielerei an den anderen Beispielen. Rackeln Sie immer am höchstwertigen Lager. Immer dann, wenn Ihr Rackeln zu einer Verformung führt (Biegung oder Dehnung/Stauchung), liegt eine statische Unbestimmtheit vor.

Ein anderer Gedanke ist die Montierbarkeit. Eine statisch bestimmte Lagerung ist ohne vorherige Justierung montierbar (des passt scho). Bei statischer Unbestimmtheit muss der Lagerabstand (Beispiel 1) oder der Lagerabstand und die Lagerhöhe (Beispiel 2) genau stimmen. ■

### 2.4.4. Übung, Balken mit Gelenk

Ein Tragwerk besteht aus zwei gelenkig verbundenen Balken, es wird mit der Kraft  $F$  belastet. Gegeben:

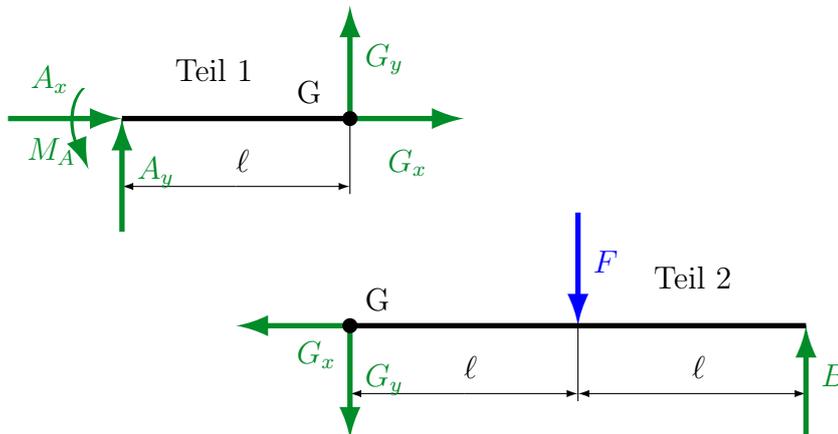


123-4.TEX

Gesucht: Alle Lagerreaktionen in A und B, Kräfte im Gelenk G.

Auf den ersten Blick könnte man ein statisch unbestimmtes Problem vermuten. Die Anordnung ist links dreiwertig und rechts einwertig gelagert. Für diese vier Lagerreaktionen scheinen die Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichend zu sein. Der Schein trügt. Lindernd wirkt das Gelenk G. Rackeln Sie spaßenshalber an Lager A.

Wir schneiden die Lager A und B sowie das Gelenk G.



Ein kurzer Zählappell liefert sechs unbekannte Größen. Da wir zwei unabhängige, vollständig freigeschnittene Teile haben, bekommen wir sechs Gleichungen. Ein Mathematiker würde sagen: „Das Problem ist lösbar“ und sich anderen Aufgaben zuwenden. Wir machen Mechanik und werden das Problem tatsächlich lösen.

Wer gerne systematisch arbeitet, trägt Schnittkräfte und -momente häufig wie hier an: Am zuerst betrachteten Schnittufer werden alle Schnittgrößen in positiver Richtung angetragen. Das gilt für  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $M_A$ ,  $G_x$ ,  $G_y$  an Teil 1. Bei Teil 2 sind wir bezüglich

$G_x$ ,  $G_y$  wegen des Gegenwirkungsprinzips festgelegt. Bei  $B$  gilt die Vorgehensweise wieder. Die (fast) einheitliche Vorzeichenlage in den Kräftegleichgewichten erleichtert die Fehlersuche. Kann man machen, muss man nicht.

KG u. MG Teil 1

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = A_x + G_x$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = A_y + G_y$$

$$(3) \quad \sum M_{[A]} \equiv 0 = M_A + G_y \ell$$

KG u. MG Teil 2

$$(4) \quad \sum X \equiv 0 = -G_x$$

$$(5) \quad \sum Y \equiv 0 = -G_y - F + B$$

$$(6) \quad \sum M_{[G]} \equiv 0 = -F \ell + B \cdot 2\ell$$

$$\begin{array}{lll} (4) \rightarrow G_x, & (6) \rightarrow B, & G_x \text{ in (1)} \rightarrow A_x, \\ B \text{ in (5)} \rightarrow G_y, & G_y \text{ in (2)} \rightarrow A_y, & G_y \text{ in (3)} \rightarrow M_A. \end{array}$$

Bei sechs Gleichungen und sechs Unbekannten ist das Aufstellen einer Strategie sehr gut investierte Zeit. Sie müssen auf jeden Fall diese Aufgabe (und alle anderen) komplett selbst lösen können, inklusive Aufstellen einer Strategie. Nicht nur die vorgekaute Lösung nachvollziehen. Natürlich bemühe ich mich, die Lösung möglichst einleuchtend darzustellen. Das wiegt Sie aber in falscher Sicherheit (Ey voll easy das Ganze). Musterlösung weg, selber machen, spätestens beim zweiten Mal!

$$(4) \quad \underline{G_x = 0}$$

$$(6) \quad B \cdot 2\ell = F \ell$$

$$B = F \frac{\ell}{2\ell}$$

$$\underline{B = \frac{F}{2}}$$

$$(1) \quad A_x = -G_x$$

$$\underline{A_x = 0}$$

$$(5) \quad G_y = B - F = \frac{F}{2} - F$$

$$\underline{G_y = -\frac{F}{2}}$$

$$(2) \quad A_y = -G_y$$

$$\underline{A_y = \frac{F}{2}}$$

$$(3) \quad M_A = -G_y \ell$$

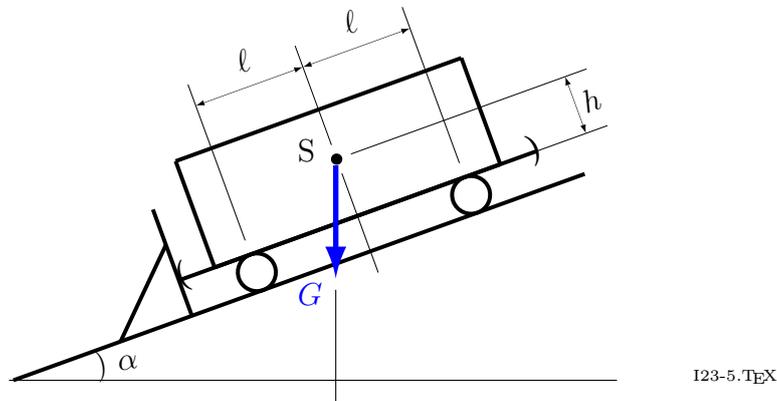
$$\underline{M_A = \frac{F \ell}{2}}$$

■

### 2.4.5. Übung, Eisenbahnwagen am Prellbock

Ein Güterwagen steht auf einer Rampe an einem gut gefetteten Prellbock. Gegeben:

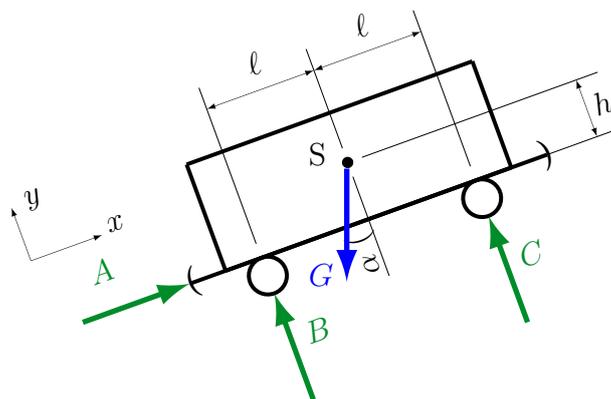
$$G, \ell, h, \alpha.$$



Welche Kräfte wirken auf Räder und Puffer? Hinweis: Die Radbremsen sind gelöst.

Bisher wurde uns über die Lagerungssymbole und den Lagerzettel recht genau gesagt, welche Schnittgrößen wir wie anzutragen haben. Hier liegt nun ein Fall vor, bei dem das nicht unmittelbar klar wird. Stattdessen erfahren wir von Fettschmierereien und Rädern, die nicht festgebremst sind.

Wir schneiden den Wagen von Rampe und Prellbock frei.



Viele Besonderheiten sind zu klären.

1. Wir wählen ein modifiziertes Koordinatensystem, in dem nur wenige Kräfte mit Winkelfunktionen behandelt werden müssen. Hier nur  $G$ .

2. Das Fett auf dem Prellbock hat zur Folge, dass in  $y$ -Richtung zwischen Puffer und Prellbock keine (nennenswerten) Kräfte entstehen können. Diese schmierige Anordnung entspricht daher einem einwertigen Lager.
3. Frei drehbare Räder entsprechen auch einwertigen Lagern. Warum? Folgender Gedanke hilft. Die Räder können sich drehen, tun es aber nicht (der Wagen steht vor einem Prellbock). Wie können Kräfte am Rad wirken, ohne dass es sich dreht? Zunächst kann die Kraft nur im Radaufstandspunkt wirken. Dann muss die Wirkungslinie durch den Radmittelpunkt gehen. Täte sie das nicht, hätte die Kraft bezüglich Radmittelpunkt einen Hebelarm und das Rad würde sich drehen.
4. Wie wandert der Rampenwinkel  $\alpha$  an die Gewichtskraft  $G$ ? Das Bild der Aufgabenstellung hilft. Wir sehen dort den Winkel  $\alpha$  begrenzt von einer horizontalen Linie und der Rampe. Wir brauchen den Winkel  $\alpha$  in der Nähe der Kraft  $G$ , um sie zu zerlegen. Dazu laufen wir entlang einer Begrenzungslinie, wir beginnen mit der horizontalen Linie. Wir kommen an eine Kreuzung, an der wir links abbiegen können. Nun sind wir auf der Wirkungslinie von  $G$ .

Jetzt laufen wir auf der anderen Begrenzungslinie, der Rampe. Auch dort kommen wir an eine Kreuzung, an der wir links abbiegen. Wir sind auf der mittleren Maßhilfslinie. Somit ist klar, dass dort zwischen Kraft  $G$  und Maßhilfslinie der Winkel  $\alpha$  liegen muss.

KG u. MG

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = A - G \sin \alpha$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = B - G \cos \alpha + C$$

$$(3) \quad \sum M_{[S]} \equiv 0 = Ah + Cl - Bl$$

Hier trifft uns ein neues Problem. Wir suchen als Momentenbezugspunkt gerne den Punkt mit den meisten unbekanntten Kräften aus. Würden wir A wählen, wüssten wir die Hebelarme von  $B$ ,  $G$ ,  $C$  nicht, da uns der Abstand vom Puffer zur Achse fehlt. Bei den Punkten B und C fehlt uns der Hebelarm der Kraft  $A$ , da uns das Maß 'Pufferebene über Schienenoberkante' fehlt. Der Schwerpunkt S ist trefflich bemaßt, er führt jedoch zu einem unangenehmen Gleichungssystem. Es gäbe einen sehr schönen Bezugspunkt, der ein angenehmes Gleichungssystem liefern könnte. Finden Sie ihn?

Wir lösen das obige System auf die harte Tour.

$$(1) \rightarrow A, \quad (2) \rightarrow B, \quad A \text{ und } B \text{ in } (3) \rightarrow C, \quad C \text{ in } (2) \rightarrow B.$$

$$(1) \quad A = G \sin \alpha$$

$$(2) \quad B = G \cos \alpha - C$$

$$(3) \quad 0 = G \sin \alpha \cdot h + C \ell - (G \cos \alpha - C) \ell$$

$$2 C \ell = -G \sin \alpha \cdot h + G \cos \alpha \cdot \ell$$

$$C = \frac{G}{2} \left( \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \frac{h}{\ell} \right)$$

$$(2) \quad B = G \cos \alpha - \frac{G}{2} \left( \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \frac{h}{\ell} \right)$$

$$B = \frac{G}{2} \left( \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \frac{h}{\ell} \right)$$

Vorsicht: Der Schnellschuss, dass die Gewichtskraft sich gleichmäßig auf die beiden Achsen verteilt, ist trotz der Symmetrie falsch, wie wir an den Ergebnissen für  $B$  und  $C$  sehen können. Bei zu großem Winkel  $\alpha$  kippt der Wagen sogar aus den Latschen, weil die Kraft  $C$  Null oder gar negativ wird. Kriegen Sie ihn raus?

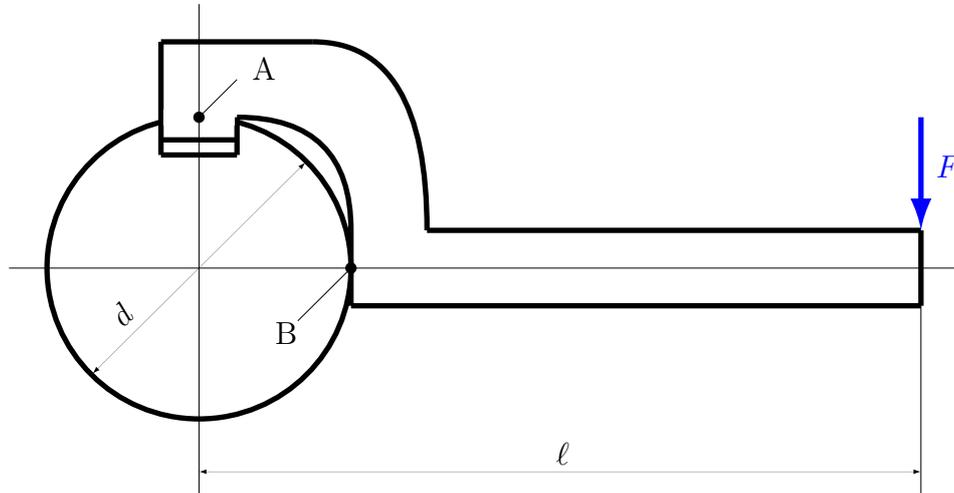
Kippen bei  $\alpha > \arctan \frac{\ell}{h}$



### 2.4.6. Übung, Hakenschlüssel

Mit einem Hakenschlüssel soll das Moment  $F \ell$  erzeugt werden. Gegeben:

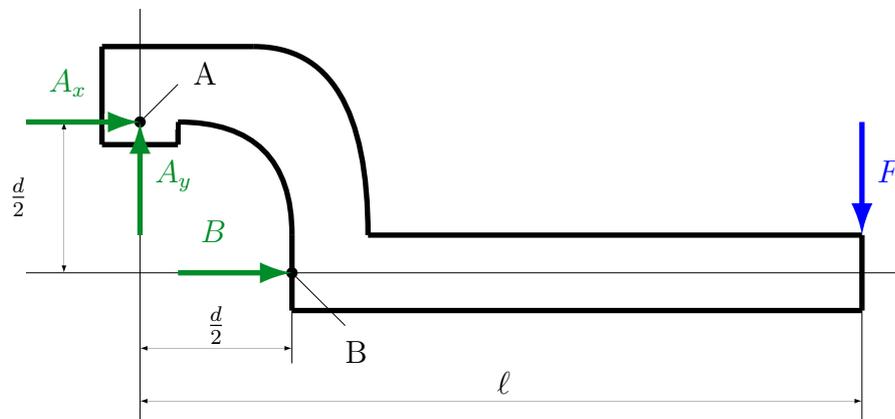
$$F, \ell, d.$$



I23-6.TEX

Welche Reaktionskräfte wirken an den Punkten A und B? Die Breite des Hakens sei beliebig klein, weshalb vereinfachend der Punkt A als Kraftangriffspunkt anzusehen ist.

Freischneiden des Hakenschlüssels



Auch hier muss die Wertigkeit der Lagerungs- oder Berührstellen selbst gefunden werden. Beim Punkt B fehlt der Hinweis auf Schmierstoff, wie beim Eisenbahwagen, trotzdem sind die Verhältnisse auch hier mit einem einwertigen Lager vergleichbar.

KG u. MG

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = A_x + B$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = A_y - F$$

$$(3) \quad \sum M_{[A]} \equiv 0 = B \frac{d}{2} - F \ell$$

$$(2) \rightarrow A_y,$$

$$(3) \rightarrow B, \quad B \text{ in (1)} \rightarrow A_x.$$

$$(2) \quad A_y = F$$

$$(3) \quad B = F \frac{2\ell}{d}$$

$$(1) \quad A_x = -B$$

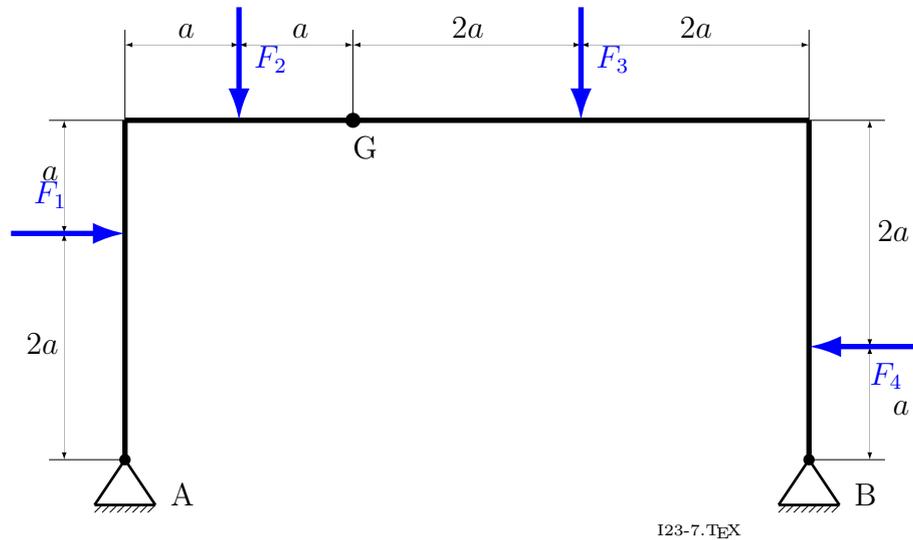
$$A_x = -F \frac{2\ell}{d}$$

■

### 2.4.7. Übung; Grubenausbau

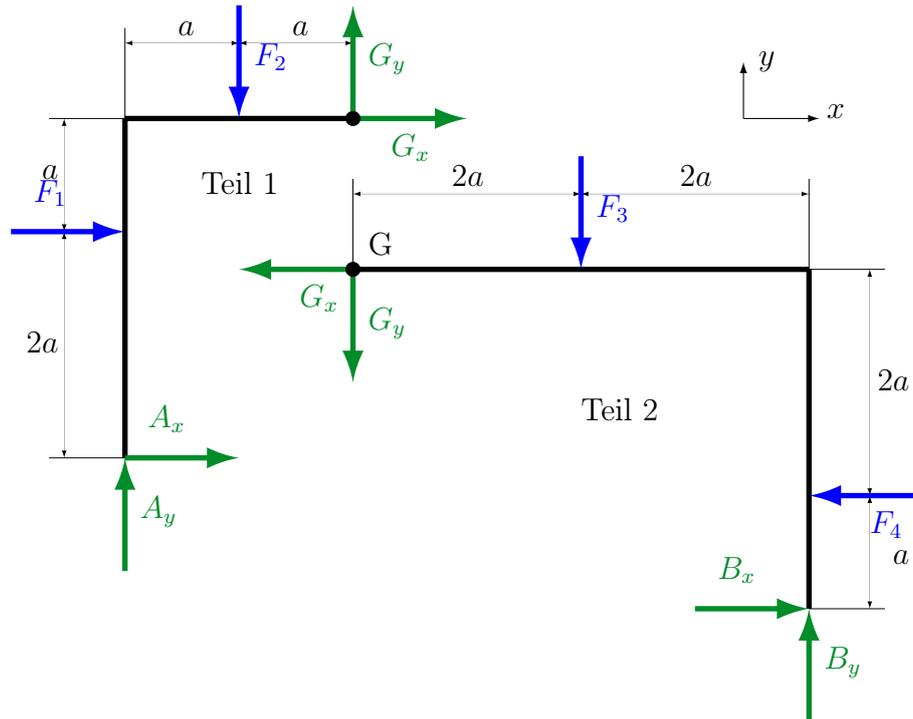
Vier Kräfte wirken auf einen Grubenausbau. Gegeben:

$$F_1 = F_4 = 10 \text{ kN}, \quad F_2 = 30 \text{ kN}, \quad F_3 = 60 \text{ kN}, \quad a = 1 \text{ m}.$$



Gesucht sind die Lagerreaktionen in A und B sowie die Kräfte im Gelenk G

Schneiden der Lager A und B sowie des Gelenks G



KG u. MG Teil 1

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = A_x + F_1 + G_x$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = A_y - F_2 + G_y$$

$$(3) \quad \sum M_{[A]} \equiv 0 = -F_1 \cdot 2a - F_2 a - G_x \cdot 3a + G_y \cdot 2a$$

KG u. MG Teil 2

$$(4) \quad \sum X \equiv 0 = -G_x - F_4 + B_x$$

$$(5) \quad \sum Y \equiv 0 = -G_y - F_3 + B_y$$

$$(6) \quad \sum M_{[B]} \equiv 0 = F_4 a + F_3 \cdot 2a + G_x \cdot 3a + G_y \cdot 4a$$

Strategie: Es gibt keine Gleichung mit nur einer Unbekannten. Also suchen wir, ob es zwei Gleichungen gibt, die zwei gleiche Unbekannte haben. Das Trifft auf die Gleichungen (3) und (6) zu. Man könnte nun Gleichung (3) zu  $G_x$  auflösen und das ganze in (6) einsetzen. Ich zeige Ihnen eine andere Variante, indem die Gleichungen (3) und (6) addiert werden.

$$(3)+(6) \rightarrow G_y, \quad G_y \text{ in (2)} \rightarrow A_y, \quad G_y \text{ in (5)} \rightarrow B_y, \\ G_y \text{ in (3)} \rightarrow G_x, \quad G_x \text{ in (1)} \rightarrow A_x, \quad G_x \text{ in (4)} \rightarrow B_x,$$

$$(3) + (6) \quad - F_1 \cdot 2a - F_2 a - \cancel{G_x \cdot 3a} + G_y \cdot 2a \\ + F_4 a + F_3 \cdot 2a + \cancel{G_x \cdot 3a} + G_y \cdot 4a = 0 \quad | : a \\ - 2 F_1 - F_2 + 2 G_y + F_4 + 2 F_3 + 4 G_y = 0$$

$$6 G_y = 2 F_1 + F_2 - F_4 - 2 F_3$$

$$G_y = \frac{1}{6} (2 F_1 + F_2 - F_4 - 2 F_3)$$

$$\underline{G_y = -13,3 \text{ kN}}$$

$$(2) \quad A_y = F_2 - G_y$$

$$A_y = \frac{6}{6} F_2 - \frac{1}{6} (2 F_1 + F_2 - F_4 - 2 F_3)$$

$$A_y = \frac{1}{6} (-2 F_1 + 5 F_2 + F_4 + 2 F_3)$$

$$\underline{A_y = 43,3 \text{ kN}}$$

$$(5) \quad B_y = F_3 + G_y$$

$$B_y = \frac{6}{6} F_3 + \frac{1}{6} (2 F_1 + F_2 - F_4 - 2 F_3)$$

$$B_y = \frac{1}{6} (2 F_1 + F_2 - F_4 + 4 F_3)$$

$$\underline{B_y = 46,7 \text{ kN}}$$

$$(3) \quad 3 G_x = -2 F_1 - F_2 + 2 G_y$$

$$3 G_x = -2 F_1 - F_2 + \frac{2}{6} (2 F_1 + F_2 - F_4 - 2 F_3)$$

$$G_x = -\frac{2}{3} F_1 - \frac{1}{3} F_2 + \frac{2}{18} (2 F_1 + F_2 - F_4 - 2 F_3)$$

$$G_x = -\frac{6}{9} F_1 - \frac{3}{9} F_2 + \frac{1}{9} (2 F_1 + F_2 - F_4 - 2 F_3)$$

$$G_x = \frac{1}{9} (-4 F_1 - 2 F_2 - F_4 - 2 F_3)$$

$$\underline{G_x = -25,6 \text{ kN}}$$

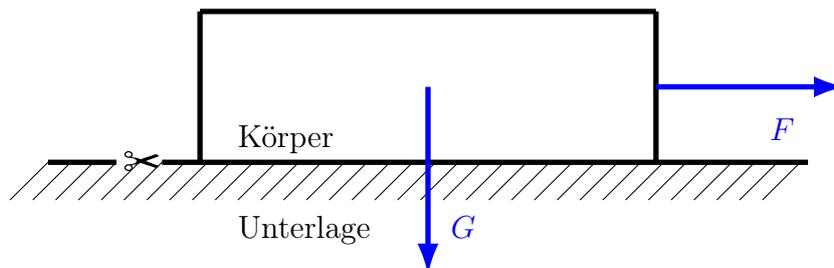
$$\begin{aligned}(1) \quad A_x &= -F_1 - G_x \\ A_x &= -F_1 - \frac{1}{9}(-4F_1 - 2F_2 - F_4 - 2F_3) \\ A_x &= -\frac{9}{9}F_1 + \frac{1}{9}(4F_1 + 2F_2 + F_4 + 2F_3) \\ A_x &= \frac{1}{9}(-5F_1 + 2F_2 + F_4 + 2F_3) \\ \underline{A_x} &= \underline{15,6 \text{ kN}} \\ (4) \quad B_x &= F_4 + G_x \\ B_x &= \frac{1}{9}(-4F_1 - 2F_2 + 8F_4 - 2F_3) \\ \underline{B_x} &= \underline{-15,6 \text{ kN}}\end{aligned}$$

Wer sich durch diesen Wust trittsicher bewegen kann, braucht die Klausur nicht zu fürchten. Für eine Klausur wäre diese Aufgabe zu umfangreich. Wer dann noch die Winkelfunktionen beherrscht, kann sich entspannt zurücklehnen. ■

### 3. Grundlagen der trockenen Reibung, Coulombsche Reibung

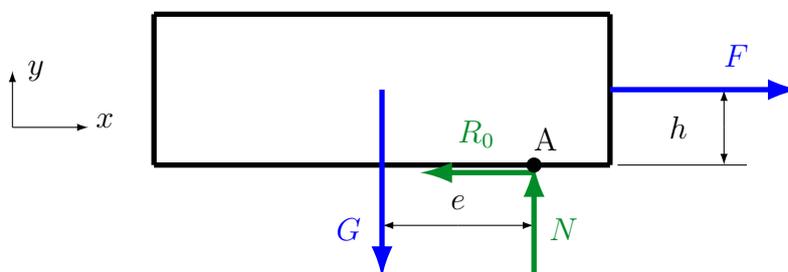
#### 3.1. Haftreibung (Reibung des Ruhezustands)

Beobachtung



Sofern  $F$  einen bestimmten Wert nicht überschreitet, erfolgt keine Bewegung zwischen Körper und Unterlage.

Wir schlussfolgern eine Kraft(-verteilung) in der Berührfläche, die der Kraft  $F$  entgegenwirkt. Wir nennen sie Reibungskraft. Vereinfachung: Flächige Kraftverteilungen werden zu je einer Resultierenden zusammengefasst. Zunächst wissen wir nicht, wo der Kraftangriffspunkt der beiden Kräfte sein wird.



Zur Namensgebung: Normalkräfte  $N$  heißen so, weil sie normal d.h. senkrecht auf einer Fläche stehen. Die Haftreibungskräfte  $R_0$  sind 'Reibungskräfte bei null Geschwindigkeit'. Den Punkt A mit dem Maß  $e$  haben wir willkürlich festgelegt.

KG u. MG.

$$\sum X \equiv 0 = F - R_0$$

$$\sum Y \equiv 0 = N - G$$

$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = G e - F h$$

Die unbekanntenen Größen  $R_0$ ,  $N$  und  $e$  können so berechnet werden. Was wir auf diese Art nicht klären können, ist die Frage, wie groß die Reibkraft  $R_0$  maximal werden kann.

Bei der trockenen oder Coulombschen Reibung ist die maximal mögliche Haftreibungskraft  $R_0$  abhängig von

- der Materialpaarung,
- der Normalkraft  $N$ .

Dagegen nicht von der Berührungsfläche.

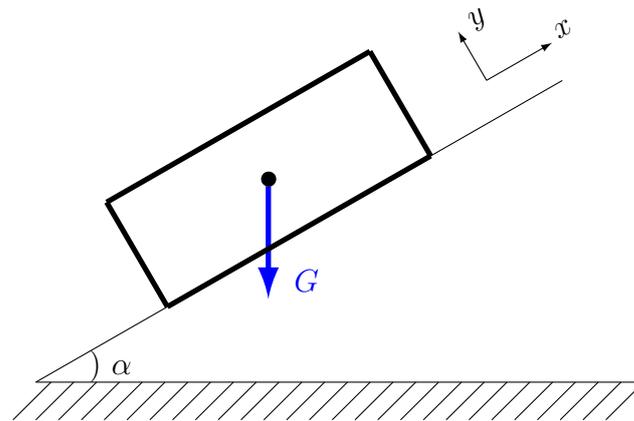
Autofans, die alles Geld in die breiten Puschen ihrer Karre gesteckt haben, müssen jetzt ganz tapfer sein. Jedoch, bei Rennreifen gibt es neben dem hier behandelten Effekt noch einen weiteren zu berücksichtigen. Ab einer bestimmten Temperatur beginnen spezielle Gummimischungen auf der Fahrbahnoberfläche zu kleben. Dieser Effekt ist flächenabhängig, weshalb Rennwagen sehr breite Reifen haben. Um das von Anfang an nutzen zu können, starten sie mit vorgeheizten Rädern.

Die Richtung von  $R_0$  wirkt entgegengesetzt der angestrebten Bewegung. Vorzeichenrichtiger Ansatz beim Freischneiden ist wichtig.

$$(I.12) \quad |\vec{R}_0| < \mu_0 |\vec{N}| \quad \text{oder} \quad R_0 < \mu_0 N$$

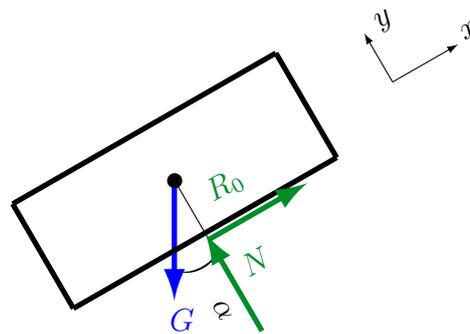
Diese Ungleichung wird Haftbedingung genannt, mit  $\mu_0$ : Haftreibungszahl, die Materialabhängig ist und experimentell ermittelt werden muss. Gleichung I.12 ist keine zusätzliche Bestimmungsgleichung. Wir können nur kontrollieren, ob tatsächlich Haftreibung besteht, der Körper also nicht ins Rutschen kommt.

Beim Thema Reibung müssen wir uns vorübergehend von einem liebgewonnen Prinzip verabschieden. Wir müssen die Schnittkräfte  $R_0$  und  $N$  richtig herum antragen. Bei der Normalkraft  $N$  ist das ganz einfach, die Pfeilspitze zeigt immer auf die Reiboberfläche. Bei der Reibkraft  $R_0$  müssen wir herausfinden, in welche Richtung ein Körper rutschen könnte. Entgegen dieser Richtung muss  $R_0$  am Körper wirken.

**Beispiel**

Bis zu welchem Winkel  $\alpha$  herrscht Ruhe?

Freischneiden



Auf folgendes müssen wir achten:

1. Die Normalkraft  $N$  zeigt mit der Spitze auf die Oberfläche des Körpers.
2. Der Körper könnte den Hang hinabrutschen. Die Reibkraft  $R_0$  verhindert das, indem sie der Bewegungsrichtung entgegenwirkt.
3. Der Kraftangriffspunkt von  $N$  und  $R_0$  ist unerheblich. Wir haben ihn so gewählt, dass uns das Einzeichnen des Winkels  $\alpha$  gut gelingt.
4. Den Rampenwinkel  $\alpha$  haben wir wie beim Eisenbahnwagen in Übungsaufgabe 2.4.5 auf Seite 65 durch 'zwei mal links abbiegen' als den Winkel identifiziert, der zwischen den Kräften  $G$  und  $N$  liegt.

Kräftegleichgewicht

$$\sum X \equiv 0 = R_0 - G \sin \alpha$$

$$\sum Y \equiv 0 = N - G \cos \alpha$$

Mit dem Momentengleichgewicht könnten wir die Lage des Kraftangriffspunkt von  $N$  und  $R_0$  berechnen, wenn die Schwerpunkthöhe bekannt wäre. Diese Information ist unerheblich, so dass wir bei Reibung bis auf weiteres auf das Momentengleichgewicht verzichten.

$$R_0 = G \sin \alpha$$

$$N = G \cos \alpha$$

Nun wenden wir die Haftbedingung I.12 auf Seite 75 an.

$$R_0 < \mu_0 N$$

$$G \sin \alpha < \mu_0 G \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < \mu_0$$

$$\mu_0 > \tan \alpha$$

Mit diesem Versuch 'Klotz auf Rampe' kann sehr einfach die Haftreibungszahl  $\mu_0$  bestimmt werden. Sie benötigen nur ein Brett und einen Klotz (Masse egal). Legen Sie den Klotz auf das Brett, heben das Brett an einem Ende langsam an, bis der Klotz zu rutschen anfängt. In dem Moment bestimmen Sie den Neigungswinkel  $\alpha$ . Probieren Sie es mit den unterschiedlichsten Materialien aus.

| Materialpaarung | $\mu_0$      |
|-----------------|--------------|
| Stahl-Stahl     | 0,15         |
| Stahl-Holz      | 0,5          |
| Gummi-Asphalt   | 0,55 ... 1,0 |
| Stahl-PTFE      | 0,04         |

Teflon oder Polytetrafluorethylen (PTFE) ist neben einer Bratpfannenbeschichtung auch ein sehr guter Festschmierstoff. In der Raumfahrt, im Hochvakuum des Weltraums können Gelenke nicht mit Ölen oder Fetten geschmiert werden. Diese Fluide würden sofort verdampfen. Mangels Luftsauerstoff würde es noch nicht einmal Oxidschichten geben, die häufig eine geringere Haftreibung aufweisen, als die Grundwerkstoffe. Ohne Teflon könnte kein Sonnenkollektor an einem Satelliten ausgeklappt werden, nichts könnte sich bewegen. Insofern stimmt die Legende, dass Teflon für die Raumfahrt erfunden wurde

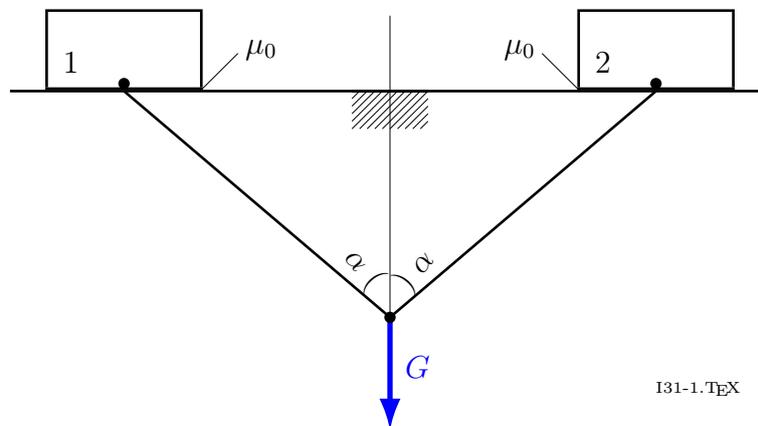
und in der Bratpfanne gelandet ist. Nicht nur dort. Die Klimamembranen in Segelklamotten und Stiefeln (z.B. Gore-Tex) bestehen aus gereckten Teflonfolien. Teflon ist zunächst ein recht unbedenklicher Werkstoff. Abgeschabte Pfannenbeschichtung, die verschluckt wird, ist unbedenklich. Jedoch darf Teflon nicht verbrannt werden. Beim Verbrennen können Dioxine und Furane entstehen, die hochgiftig sind. Teflonmüll ist Sondermüll!



### 3.1.1. Übung, zwei Klötze an der Tischkante

Wie groß muss  $\mu_0$  mindestens sein, damit Gleichgewicht herrscht? Gegeben:

$\alpha$ ,  $G$  : beliebig.



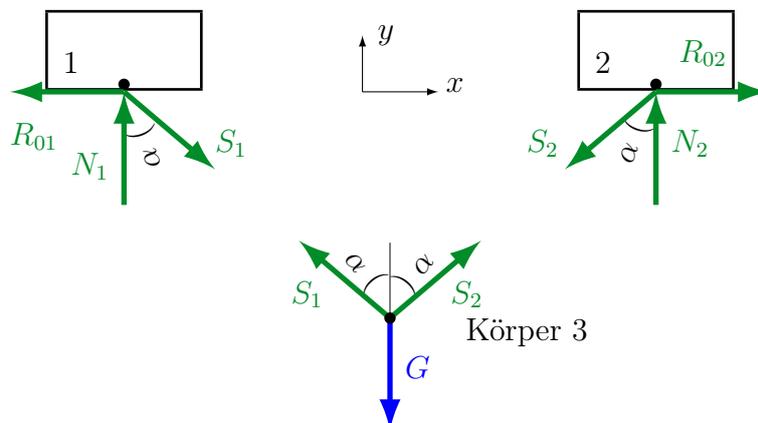
I31-1.TEX

Die Körper 1 und 2 seien masselos.

Bei den bisherigen Beispielen der Reibung haben wir festgestellt, dass das Momentengleichgewicht an Bedeutung verloren hat, da damit lediglich der tatsächliche Angriffspunkt von  $R_0$  und  $N$  im Reibspalt berechnet werden kann. Das ist nicht von Interesse, weshalb wir bei Schnittbildern  $R_0$  und  $N$  so anbringen, dass das Momentengleichgewicht von selbst erfüllt ist (zentrales Kräftesystem).

Zudem müssen wir wissen, wohin sich die Körper 1 und 2 bewegen, wenn sie ins Rutschen geraten. Sie würden zur Mitte rutschen, so dass die Haftreibungskräfte nach außen zeigen müssen. Die Normalkräfte zeigen wie immer mit der Spitze auf die Oberfläche.

Freischneiden



KG Körper 1

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = -R_{01} + S_1 \sin \alpha$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = N_1 - S_1 \cos \alpha$$

KG Körper 3

$$(3) \quad \sum X \equiv 0 = S_2 \sin \alpha - S_1 \sin \alpha$$

$$(4) \quad \sum Y \equiv 0 = (S_1 + S_2) \cos \alpha - G$$

$$(3) \rightarrow S_1, \quad S_1 \text{ in } (4) \rightarrow S_2, \quad S_1 \text{ in } (1) \rightarrow R_{01}, \quad S_1 \text{ in } (2) \rightarrow N_1$$

Warum wird Körper 2 nicht behandelt? Weil ich ein fauler Hund bin. Wir werden gleich sehen, dass wegen der Symmetrie der Körper 2 keine neuen Erkenntnisse liefert. Die Seilkräfte  $S_1$  und  $S_2$  sind gleich groß.

$$(3) \quad S_1 = S_2$$

$$(4) \quad 2 S_1 \cos \alpha = G$$

$$S_1 = \frac{G}{2 \cos \alpha}$$

$$(1) \quad R_{01} = S_1 \sin \alpha$$

$$(2) \quad N_1 = S_1 \cos \alpha$$

Anwenden der Haftbedingung  $R_0 < \mu_0 N$ . Hier lautet sie:

$$R_{01} < \mu_0 N_1$$

$$\cancel{S_1} \sin \alpha < \mu_0 \cancel{S_1} \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < \mu_0$$

$$\mu_0 > \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\mu_0 > \tan \alpha$$

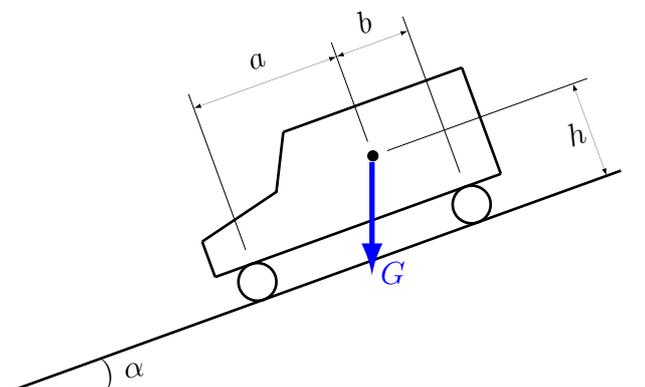
Wieder einmal kann die Haftreibungszahl  $\mu_0$  direkt mit dem Tangens eines Winkels verglichen werden.

Noch etwas: Wenn in der Aufgabenstellung steht, dass eine Größe beliebig ist, so darf man erwarten, dass sich diese Größe herauskürzt. ■

### 3.1.2. Übung, Auto auf schiefer Ebene

Ein PKW steht mit angezogener Handbremse hangabwärts auf einer schiefen Ebene. Wie groß muss  $\mu_0$  mindestens sein, damit der Wagen nicht rutscht? Bei dem Auto handelt es sich weder um einen Saab 96 noch um einen Renault R4<sup>5</sup>. Deshalb: Die Bremse wirkt auf die Hinterräder. Gegeben:

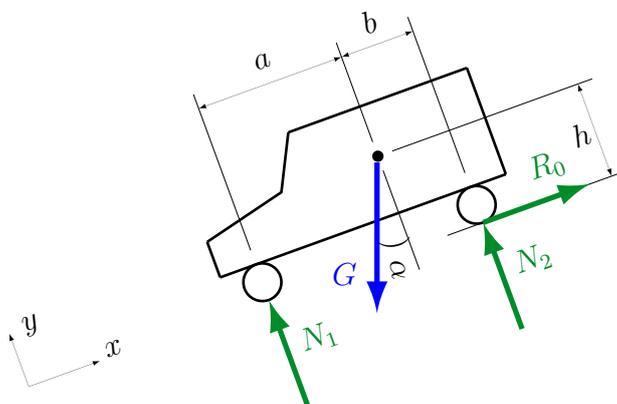
$$G, a, b, h, \alpha.$$



I31-2.TEX

Freischneiden

Wenn das Auto rutscht, rutscht es den Berg hinab. Eine Haftreibungskraft am festgebremsten Hinterrad muss das Hinabrutschen verhindern und zeigt daher hangaufwärts.



<sup>5</sup>Saab 96 und Renault R4 sind die einzigen mir bekannten Autos, bei denen die Handbremse auf die Vorderräder wirkt. Beide Autos sind rostbedingt aus dem Straßenbild verschwunden. Der R4 war zu meinen Zeiten eine beliebte Studikarre.

Frei drehbare Räder (hier das Vorderrad) haben wir in Aufgabe 2.4.5 auf Seite 65 kennengelernt. Dort wird auch beschrieben, wie wir den Winkel  $\alpha$  in die Nähe der Gewichtskraft  $G$  bekommen. Das festgebremste Rad ist uns neu. Die Tatsache, dass es festgebremst ist, wird durch die Haftreibungskraft  $R_0$  berücksichtigt.

Achtung: Da wir hier zwei Radaufstandskräfte haben ( $N_1$  und  $N_2$ ) wird das Momentengleichgewicht wieder bedeutsam, nur so bekommen wir die Radlastverteilung berechnet.

KG u. MG

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = -G \sin \alpha + R_0$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = N_1 + N_2 - G \cos \alpha$$

$$(3) \quad \sum M_{[G]} \equiv 0 = -N_1 a + N_2 b + R_0 h$$

Der Momentenbezugspunkt G erspart es uns, im MG die Kraft  $G$  zu zerlegen, liefert aber ein ungünstiges Gleichungssystem mit drei unbekanntem Größen im MG. Besonders günstig ist der Aufstandspunkt des Vorderrades als Bezugspunkt. Das würde den Rechenaufwand erheblich verringern. Probieren Sie es bei einem zweiten Durchgang aus. So etwas im Vorfeld zu erkennen ist nicht einfach, deshalb machen wir wie ursprünglich angenommen weiter.

$$(1) \rightarrow R_0, \quad (2) \rightarrow N_1, \quad N_1 \text{ und } R_0 \text{ in } (3) \rightarrow N_2$$

Für die Haftbedingung benötigen wir Informationen zu  $R_0$  und  $N_2$ .  $N_1$  hingegen ist uninteressant. Es ist taktisch klug, sich nicht gleich auf die gesuchte Größe  $N_2$  zu stürzen und im Schritt '(2)  $\rightarrow N_1$ ' erst einmal absichtlich daneben zu schießen. Die wichtige Größe (hier  $N_2$ ) heben wir uns bis zum Schluss auf.

$$(1) \quad R_0 = G \sin \alpha$$

$$(2) \quad N_1 = G \cos \alpha - N_2$$

$$(3) \quad N_2 b = N_1 a - R_0 h$$

$$N_2 b = (G \cos \alpha - N_2) a - G \sin \alpha \cdot h$$

$$N_2 (a + b) = G \cos \alpha \cdot a - G \sin \alpha \cdot h$$

$$N_2 = \frac{G \cos \alpha \cdot a - G \sin \alpha \cdot h}{a + b}$$

$$N_2 = \frac{G (\cos \alpha \cdot a - \sin \alpha \cdot h)}{a + b}$$

Haftbedingung

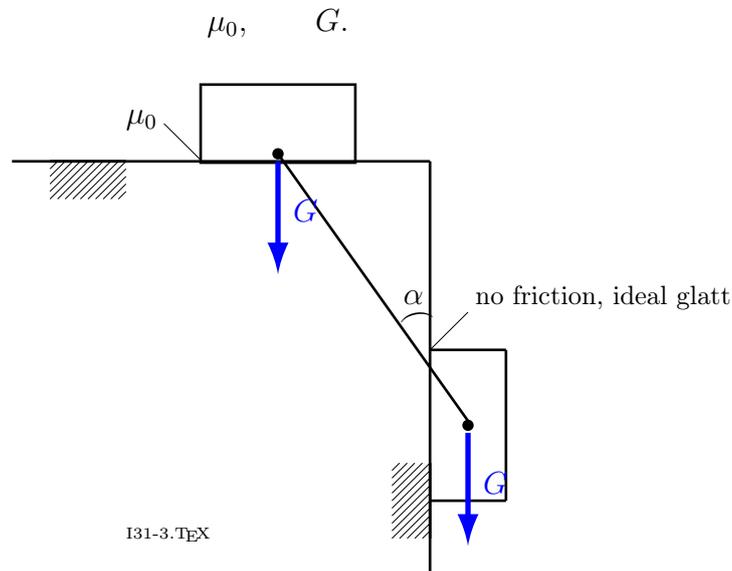
$$R_0 < \mu_0 N_2$$
$$\cancel{G} \sin \alpha < \mu_0 \frac{\cancel{G} (\cos \alpha \cdot a - \sin \alpha \cdot h)}{a + b}$$
$$\frac{\sin \alpha \cdot (a + b)}{\cos \alpha \cdot a - \sin \alpha \cdot h} < \mu_0$$
$$\mu_0 > \frac{\sin \alpha \cdot (a + b)}{\cos \alpha \cdot a - \sin \alpha \cdot h}$$

Kein schönes Ergebnis, aber ein Ergebnis. War schon einmal Klausuraufgabe, damals mit Zahlenwerten. Erfinden Sie doch selbst welche.

Die Idee zu dieser Aufgabe hatte ich, als ich folgendes beobachtete. Im Winter bei Blitzeis wollte der Mensch aus dem Auto vor mir wieder in sein Auto einsteigen, er hatte kurz Eis von den Scheiben gekratzt. Er rutschte aus und fiel hin. Er zog sich an der Tür hoch und kam erneut ins Straucheln. Daraufhin rutschte sein Auto den recht flachen Hang hinunter. Es ist kein Schaden entstanden, das Auto blieb an einem Randstein hängen. ■

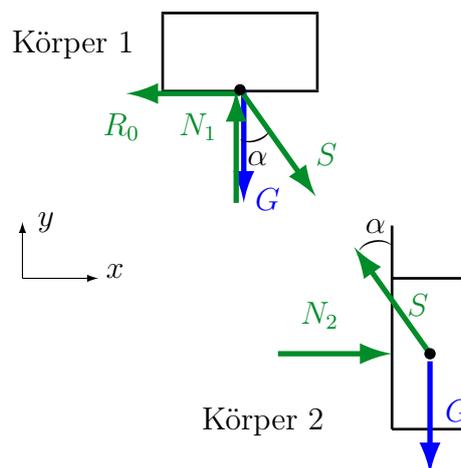
### 3.1.3. Übung, zwei Klötze, eine Leine

Bis zu welchem Winkel  $\alpha$  bleiben die beiden über ein gewichtsloses Seil miteinander verbundenen Gewichte in Ruhe? Gegeben:



Wir müssen erkennen, wie sich das System bewegt, wenn die Haftreibungsgrenze überschritten wird. Es ist unmöglich, dass der Körper von alleine an der senkrechten Wand hochgehoben wird. Der Körper, der obenauf liegt, wird zur Tischkante nach rechts gleiten, die Haftreibungskraft verhindert das, wenn sie am Körper nach links zeigt.

Freischneiden



Erneut haben wir an beiden Körpern zentrale Kräftesysteme, weshalb Momentengleichgewichte entbehrlich sind. An Körper 2 haben wir keine Reibkraft angetragen, da wir die Information haben, dass am Körper 2 keine Reibung herrscht. Hätten wir dort Reibung, wäre die Aufgabe sehr viel anspruchsvoller.

KG Körper 1

$$(1) \quad \sum X \equiv 0 = -R_0 + S \sin \alpha$$

$$(2) \quad \sum Y \equiv 0 = N_1 + -S \cos \alpha - G$$

KG Körper 2

$$(3) \quad \sum X \equiv 0 = N_2 - S \sin \alpha$$

$$(4) \quad \sum Y \equiv 0 = S \cos \alpha - G$$

(4)  $\rightarrow S$ ,  $S$  in (1)  $\rightarrow R_0$ ,  $S$  in (2)  $\rightarrow N_1$ ,  $N_2$  interessiert nicht.

$$(4) \quad S = \frac{G}{\cos \alpha}$$

$$(1) \quad R_0 = S \sin \alpha$$

$$R_0 = \frac{G}{\cos \alpha} \sin \alpha$$

$$R_0 = G \tan \alpha$$

$$(2) \quad N_1 = S \cos \alpha + G$$

$$N_1 = \frac{G}{\cos \alpha} \cos \alpha + G$$

$$N_1 = 2G$$

Haftbedingung

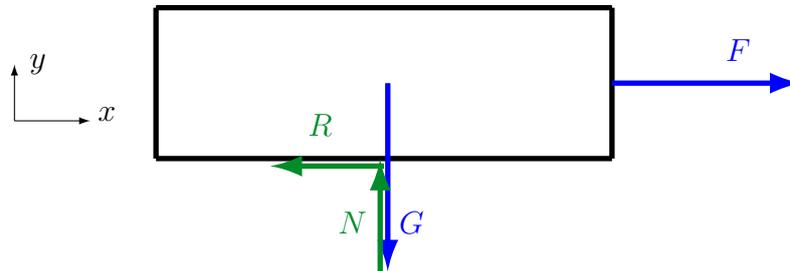
$$R_0 < \mu_0 N_1$$

$$G \tan \alpha < \mu_0 \cdot 2G$$

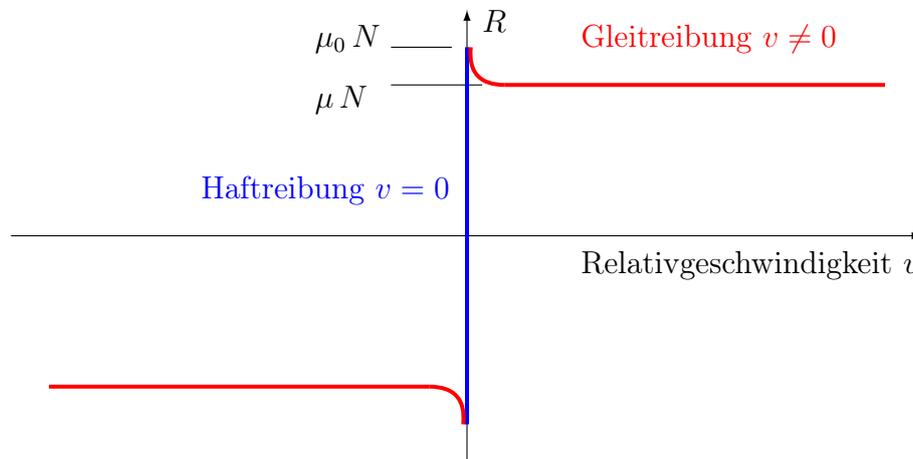
$$\alpha < \arctan(2\mu_0)$$

■

### 3.2. Gleitreibung, Reibung der Bewegung



Überschreitet oder erreicht  $F$  den Wert  $\mu_0 N$ , setzt Bewegung ein. Es wirken dann weiterhin Reibkräfte, allerdings von geringerer Größe. Die Reibkraft heißt nun  $R$  **ohne Null im Index**. Zwischen den Reibpartnern stellt sich eine Relativgeschwindigkeit  $v$  ein.



Wenn eine gewisse Mindestgeschwindigkeit überschritten ist, ist die Relativgeschwindigkeit  $v$  zwischen den Reibpartnern ohne Einfluss.

Wenn wir hier über Geschwindigkeiten  $v$  reden, machen wir dann nicht Dynamik? Klare Antwort darauf: Jein. Die Beschleunigung aus der Ruhe heraus mit der sinkenden Reibkraft  $R$  (roter Bogen) interessiert uns nicht. Erst wenn der Körper rutscht, schauen wir wieder hin. Es hat sich eine konstante Geschwindigkeit  $v$  eingestellt und wir können unter diesen Umständen (keine Beschleunigung) mit den Gesetzen der Statik weiterrechnen.

Wussten Sie, dass Sie und die Stadt Stralsund (etwa  $54^\circ$  nördliche Breite) sich permanent mit 981 km/h ostwärts bewegen? Das ist knapp Schallgeschwindigkeit. Am Äquator ist es sogar Mach 1,5 (1670 km/h). Der Grund ist die Erdrotation. Solange die Geschwindigkeit konstant ist, merken wir nichts davon und können die Gesetze der Statik anwenden. Das ist übrigens nicht alles. Wir alle sind mit 17.111 km/h unterwegs, um die Sonne zu umkreisen. Bloß gut, dass wir so schnell sind, sonst würden wir in die Sonne fallen.

Aber bitte auch nicht schneller werden, sonst wird es bald sehr kalt, weil wir uns von der Sonne entfernen. Ja und dann bewegt sich unser Sonnensystem noch um das Zentrum unserer Galaxie, aber ich glaube ich komme jetzt vom Thema ab. Wir rechnen statisch basta.

$$(I.13) \quad \vec{R} = -\mu |\vec{N}| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Diese Formel ist mathematisch überaus korrekt aber nicht praktikabel. Normalerweise würde ich jetzt einen fiesen Mathematikerwitz erzählen. Wir fangen mit dem Ausdruck  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$  an. Im Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  stecken zwei Informationen: der Geschwindigkeitsbetrag (z.B. 100 km/h) und die (Fahrt-)Richtung (z.B. 'nach Rostock'). Wenn wir diesen Vektor durch seinen Betrag teilen, bleibt nur die Richtung übrig ('nach Rostock'). In Wirklichkeit ist  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$  ein Einheitsvektor in Bewegungsrichtung. Das Minuszeichen besagt, dass der Vektor der Reibkraft  $\vec{R}$  der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Ferner gibt es ein neues  $\mu$  für Gleitreibung und wie bisher die Abhängigkeit vom Betrag der Normalkraft  $N$ .

Da wir es ohnehin gewohnt sind, bei Reibungsaufgaben Normal- und Reibkraft richtigerum anzutragen, können wir stark vereinfachen.

Bei vorzeichenkorrekter Annahme von Normal- und Reibkraft gilt

$$R = \mu N.$$

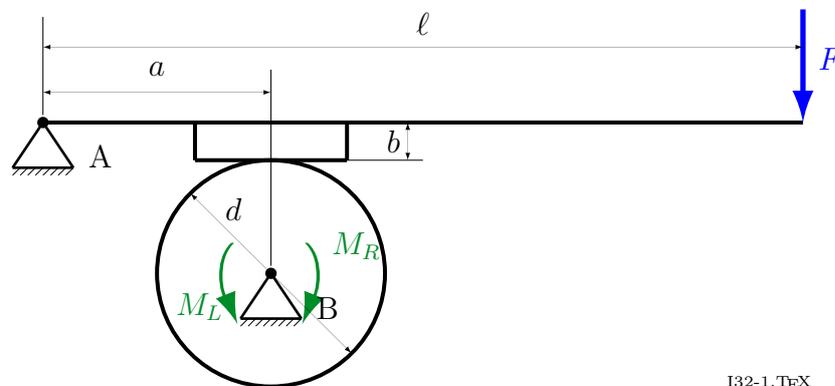
Anders als bei der Haftreibung gewinnen wir bei Gleitreibung eine zusätzliche Bestimmungsgleichung.

Bei der Haftreibung konnten wir  $R_0$  und  $N$  aus Gleichgewichtsbedingungen ausrechnen. Mit  $R_0 < \mu_0 N$  konnten wir lediglich **überprüfen**, ob das System in Ruhe bleibt. Gelegentlich wurden wir nach den Grenzbedingungen gefragt. ■

### 3.2.1. Übung, Postkutschenbremse

Gegeben:

$$a, \ell, b, \mu, d, F.$$



I32-1.TEX

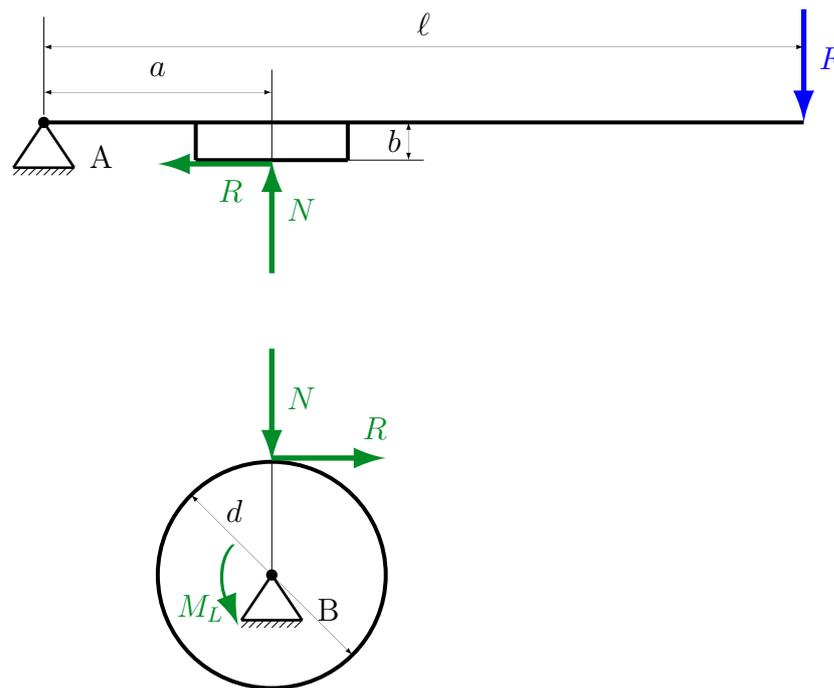
Gesucht:

- Bremsmoment bei Rechts- und Linkslauf,  $M_R$ ,  $M_L$ .
- Welcher Abstand  $b$  muss gewählt werden, damit bei beiden Drehrichtungen gleiche Bremswirkung auftritt?
- Bei welchem Abstand  $b$  wird die Bremse zum Freilauf? Welche Drehrichtung wird unmöglich?

Wir betrachten wieder einmal ein Hightech-Produkt. John Wayne tritt mit der Kraft  $F$  auf einen Hebel und bremst die Postkutsche.

Diesmal wird nur ein Lösungsweg verraten, der für  $M_L$ .  $M_R$  müssen Sie selbst herausbekommen. Die Fragen 2 und 3 erscheinen zunächst sehr merkwürdig, wir werden sehen, ob wir durch Antwort 1 schlauer werden.

a) Freischnitten Linkslauf  $M_L$



Wir müssen auf die richtige Anbringung der Reibkräfte  $R$  achten. Dazu betrachten wir das sich bewegende Teil. Das Rad wird angetrieben von  $M_L$  und dreht sich. Die Reibkraft wirkt dieser Bewegung entgegen.

Warum werden die zwei zweiwertigen Lager nicht abgeschnitten? Weil niemand die Lagerreaktionen dort wissen möchte. Dürfen wir das? Ja, wenn wir keine Kräftegleichgewichte aufstellen sondern nur je ein Momentengleichgewicht. Wir müssen den Lagerungspunkt zum Momentenbezugspunkt machen, so dass die unbekanntes Lagerreaktionen keinen Hebelarm haben.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \text{MG um B} \quad & \sum M_{[B]} \equiv 0 = M_L - R \frac{d}{2} \\
 (2) \quad \text{MG um A} \quad & \sum M_{[A]} \equiv 0 = -Rb + Na - F\ell \\
 (3) \quad \text{Gleitreibung} \quad & R = \mu N
 \end{aligned}$$

$$(3) \rightarrow N, \quad N \text{ in } (2) \rightarrow R, \quad R \text{ in } (1) \rightarrow M_L.$$

$$(3) \quad N = \frac{R}{\mu}$$

$$(2) \quad Rb = Na - F\ell$$

$$Rb = \frac{R}{\mu}a - F\ell$$

$$R \frac{a}{\mu} - Rb = F\ell$$

$$R \left( \frac{a}{\mu} - b \right) = F\ell$$

$$R = \frac{F\ell}{\frac{a}{\mu} - b}$$

$$(1) \quad M_L = R \frac{d}{2}$$

$$M_L = \frac{F\ell}{\frac{a}{\mu} - b} \cdot \frac{d}{2}$$

$$M_L = \frac{F\ell d}{2 \left( \frac{a}{\mu} - b \right)}$$

$$M_L = \frac{F\ell d}{2 \left( \frac{a}{\mu} - \frac{\mu b}{\mu} \right)}$$

$$M_L = \frac{\mu F\ell d}{2 (a - \mu b)}$$

Freischneiden Rechtslauf  $M_R$

Sie beginnen mit einem neuen Schnittbild, rechnen erneut und kommen auf folgendes Ergebnis.

⋮

$$M_R = \frac{\mu F\ell d}{2 (a + \mu b)}$$

b) Es soll gelten

$$M_L = M_R$$

$$\frac{\mu F \ell d}{2(a - \mu b)} = \frac{\mu F \ell d}{2(a + \mu b)}$$

$$a - \mu b = a + \mu b$$

$$-b = +b$$

$$b = 0$$

Diese Bremse hat erst bei abgefahrenen Bremsbelägen ( $b = 0$ ) in beide Richtungen die gleiche Bremswirkung. Der TÜV wäre begeistert.

c) Wenn eine Drehrichtung unmöglich ist, dann wird das Bremsmoment für diese Drehrichtung beliebig (unendlich) groß.

Welches unserer beiden Ergebnisse aus Aufgabenteil 1 hat die Möglichkeit, unendlich groß zu werden? Wo müssen wir hinschauen? Die Nenner sagen es uns. Wenn ein Nenner Null wird, wird das Ergebnis unendlich. Jaja nur Chuck Norris kann durch Null teilen.

$$M_L = \frac{\mu F \ell d}{2(a - \mu b)}$$

Für  $a = \mu b$  wird der Nenner null und  $M_L$  beliebig groß.

$$b = \frac{a}{\mu}$$

Rechtsrum kann sich das Rad drehen, linksrum nicht. So etwas nennt man Freilauf, ist in jedem Fahrrad so oder so ähnlich verbaut.

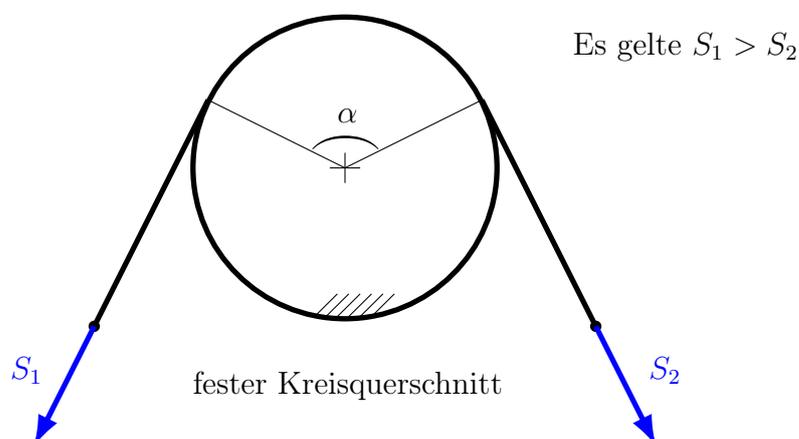
■

### 3.3. Seilreibung am Kreisquerschnitt

Eine Leine, ein Seil sei um einen festen Kreisquerschnitt geschlungen. Der Umschlingungswinkel sei  $\alpha$ .

Dieses Thema begegnet uns im täglichen Leben ständig. Eine Leine ist um eine starre, nicht drehbare Struktur gewunden. Die beiden Seilkräfte  $S_1$  und  $S_2$  können unterschiedlich groß sein. Beispiel:

- Eine Bergsteigerin seilt einen 100 kg-Bergsteiger ab, indem sie eine Leine durch einen Karabinerhaken schlingt. Die Gewichtskraft von rund 1000 N kann sie mit einer weitaus geringeren Haltekraft am freien Seilende kontrollieren.
- Ein Schiff wird an Land festgemacht, indem eine Leine achtförmig um einen Doppelpoller geschlungen wird. Das Schiff zieht wegen des ablandigen Windes mit gewaltigen Kräften an seinen Festmachern. Das freie Ende des Festmachers ist nach mehreren Umschlingungen des Doppelpollers lediglich mit einem jämmerlichen Knoten (dem Kopfschlag) gesichert.
- Jeder Knoten, auch die Schleife<sup>6</sup> an Ihren Schuhen beruht darauf. Die Kreisstruktur ist ein benachbartes Stück Schnur/Leine.
- Bei einem Riementrieb umschlingt ein Flachriemen An- und Abtriebsscheibe. Hier rotieren die Kreisstrukturen. Im Lasttrum ist die Zugkraft größer als im Leertrum (Last- und Leertrum sind an einer Fahrradkette gut zu erkennen. Oben Last- unten Leertrum). Um nicht verwirrt zu werden, wollen wir diesen Fall zunächst zurückstellen. Die Kreisstruktur steht zunächst still.



<sup>6</sup>Mit Blick aus der Seefahrt ist eine Schleife ein doppelt auf Slip gelegter Kreuzknoten.

Es gibt Fälle, bei denen die Leine sich relativ zur Kreisstruktur nicht bewegt (Knoten, Poller, Riemtrieb). In anderen Fällen gleitet die Leine an der runden Struktur (Abseilen, englisch: to abseil, kein Witz).

Auch hier ist Gleit- und Haftreibung möglich. Frage: Wie hängen die Seilkräfte  $S_2$  und  $S_1$  bei Gleichgewicht voneinander ab?

Eine infinitesimale Betrachtung entlang der gekrümmten Kontaktfläche führt zur EULER-EYTELWEIN<sup>7</sup>schen Gleichung.

Für Gleitreibung gilt

$$(I.14) \quad S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha} \quad \text{mit} \quad S_1 > S_2$$

Für Haftreibung gilt

$$(I.15) \quad S_1 < S_2 \cdot e^{\mu_0\alpha} \quad \text{mit} \quad S_1 > S_2$$

Hier liegt kein Druckfehler vor. Die kleinere Kraft  $S_2$  wird mit dem meist recht großen Faktor  $e^{\mu_0\alpha}$  multipliziert, so dass dieses Produkt größer wird als die größere Kraft  $S_1$ .

Seilreibungskräfte sind also abhängig von

- den Zugkräften  $S_1$  oder  $S_2$
- der Materialpaarung  $\mu$ ,  $\mu_0$
- vom Umschlingungswinkel  $\alpha$

Hinweis:

- Es muss identifiziert werden, welche der beiden beteiligten Seilkräfte die größere/kleinere ist,
- der Umschlingungswinkel  $\alpha$  muss im Bogenmaß eingesetzt werden.

Beim Thema Seilreibung können hässliche Pannen passieren.

- Der Umschlingungswinkel muss in Bogenmaß umgerechnet werden

$$\hat{\alpha} = \alpha^\circ \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Benutzen Sie obige Gleichung und stellen Sie Ihren Taschenrechner auf gar keinen Fall auf Bogenmaß (R) um. Ein Kommilitone hatte das vor Jahren gemacht, vergessen und infolgedessen bei mir drei Klausuren versemelt. Ich brauchte leider einige Zeit, bis ich ihm auf die Schliche kam und ihm den entscheidenden Tip geben konnte.

---

<sup>7</sup>Leonhard Euler, 1707 bis 1783,  
Johann Albert Eytelwein 1764 bis 1848

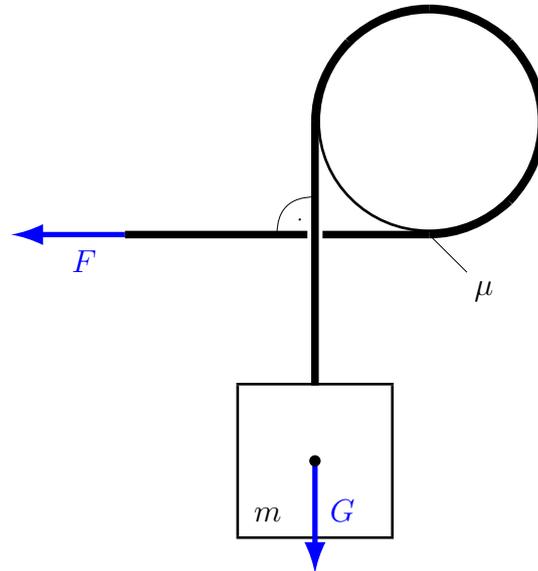
- Die Suche nach der größeren/kleineren Kraft ist das Äquivalent zur Verpflichtung, bei der ebenen Reibung  $R/R_0$  und  $N$  richtigerum einzeichnen zu müssen. Die Kraftrichtung an den Seilenden ist selbstverständlich immer ziehend (nur Idioten schieben an Seilen). Wenn das Seil rutscht, rutscht es in Richtung der größeren Kraft. Fragen Sie sich bei der Suche nach der großen/kleinen Kraft, warum mache ich diesen Quatsch, eine Leine um etwas herumzutüdeln.



### 3.3.1. Übung, Abseilen am Brückengeländer

Ein Bergsteiger soll abgeseilt werden, dazu wird eine Leine um einen Stab gewunden. Gegeben:

$$m = 100 \text{ kg}, \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \mu = 0,2.$$



I33-1.TEX

Welche Kraft  $F$  muss aufgebracht werden, damit der Bergsteiger (Masse  $m$ ) mit konstanter Geschwindigkeit abgeseilt wird? In diesem Fall gilt  $G = m g$ .

Wir haben ein Seil- Gleitreibungsproblem. Es gilt

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\alpha} \quad \text{mit} \quad S_1 > S_2.$$

Suche nach der großen/kleine Kraft.

Der schwere Bergsteiger soll unter Zuhilfenahme einer festen Struktur mit Kreisquerschnitt mit einer beherrschbaren Kraft abgeseilt werden. Daher

$$G > F$$

$$G = F \cdot e^{\mu\alpha} \quad \text{mit} \quad G > F.$$

Suche nach dem Umschlingungswinkel.

Der eingezeichnete rechte Winkel zwischen zulaufender und ablaufender Leine gibt uns den Hinweis, dass die Leine  $3/4$  einer vollen Windung anliegt. Wer in Grad denkt, rechnet

$\frac{3}{4} \cdot 360^\circ = 270^\circ$  und rechnet anschließend in Bogenmaß um. Wer in Bogenmaß denken kann, rechnet gleich  $\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$ .

$$\alpha = 270^\circ \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{3}{2}\pi \quad \text{oder} \quad \alpha = 4,712$$

Wir fahren fort

$$F = \frac{G}{e^{\mu\alpha}} = G e^{-\mu\alpha}$$

Bei umfangreichen Exponenten einer  $e$ -Funktion ist die folgende Schreibweise möglich.

$$F = 100 \cdot 9,81 \cdot \exp(-0,2 \cdot 1,5\pi) \text{ N} = 382 \text{ N.}$$

### Zusatzaufgabe.

Wir wollen jetzt mit der gleichen Haltekraft  $F = 382 \text{ N}$  statt eines Bergsteigers eine Lokomotive mit  $m = 84 \text{ t}$  (DB Baureihe 120) abseilen. Wie viele Seilwindungen müssen wir an unserer runden Struktur anbringen?

Es besteht kein Zweifel, dass  $G$  unverändert die größere Kraft ist

$$G = F \cdot e^{\mu\alpha}$$

Gesucht ist nun der Winkel  $\alpha$ , der im Exponenten einer  $e$ -Funktion steht. Hierzu formen wir um, dass die  $e$ -Funktion alleine steht und wenden anschließend den Logarithmus normalis  $\ln$  (Logarithmus zur Basis  $e$ ) an.

$$e^{\mu\alpha} = \frac{G}{F}$$

$$\mu\alpha = \ln\left(\frac{G}{F}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{G}{F}\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{0,2} \ln\left(\frac{84 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{382}\right)$$

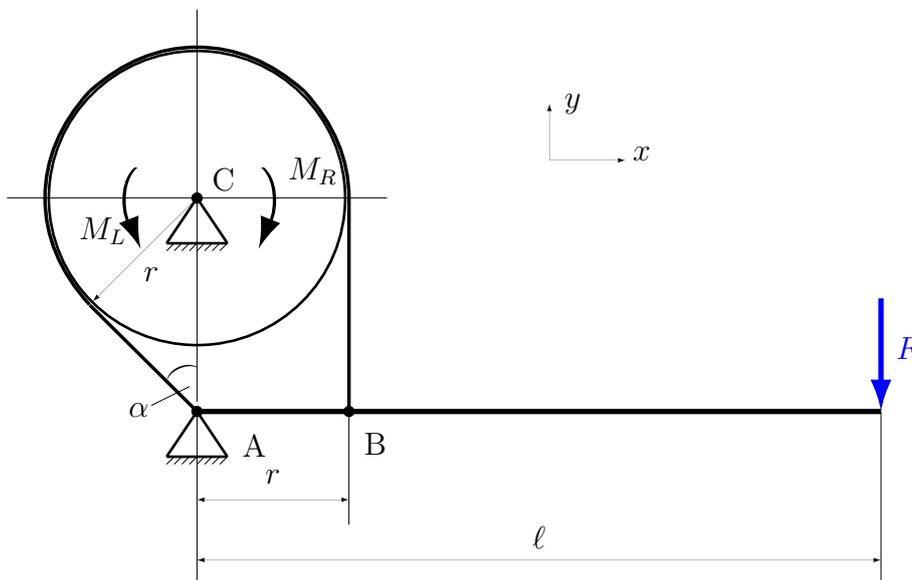
$$\alpha = 38,38 \quad \text{oder} \quad 6,1 \text{ Windungen.}$$

Hauptsache das Gelände hält die Last aus. Wir sehen, dass mit dem Phänomen Seilreibung gigantische Kräfte kontrolliert werden können. Die Zusatzaufgabe ist natürlich idiotisch, wir brauchen eine Leine, die 84 t tragen kann. Leinen aus dem Werkstoff Dyneema (Ultra-High-Molecular-Weight Polyethylene) wären hier erste Wahl. Mit bis zu  $3000 \text{ N/mm}^2$  hat dieser Werkstoff eine erstaunliche Zugfestigkeit, außerdem sind Leinen aus Dyneema erstaunlich biegsam oder biegeschlaff, wie unter Mechanikern gesagt wird. Aber Vorsicht, ganz langsam. Wenn durch Reibungshitze die Leine deutlich über  $100^\circ\text{C}$  erhitzt wird, stürzt die Lok ab. ■

### 3.3.2. Übung, Bandbremse

Eine Bandbremse. Gegeben:

$$F, \quad r, \quad \ell, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \mu_0 = 0,2.$$



I33-2.TEX

Gesucht:  $M_{Rmax}$  und  $M_{Lmax}$ , ohne dass die Walze sich dreht.

Zur Verdeutlichung: Das Bremsband ist am Lager A befestigt. Dort ist auch der Bremshebel mit Länge  $\ell$  gelenkig gelagert. Das Bremsband umschlingt die Welle und wird am Punkt B (hier kein Gelenk) am Bremshebel befestigt.

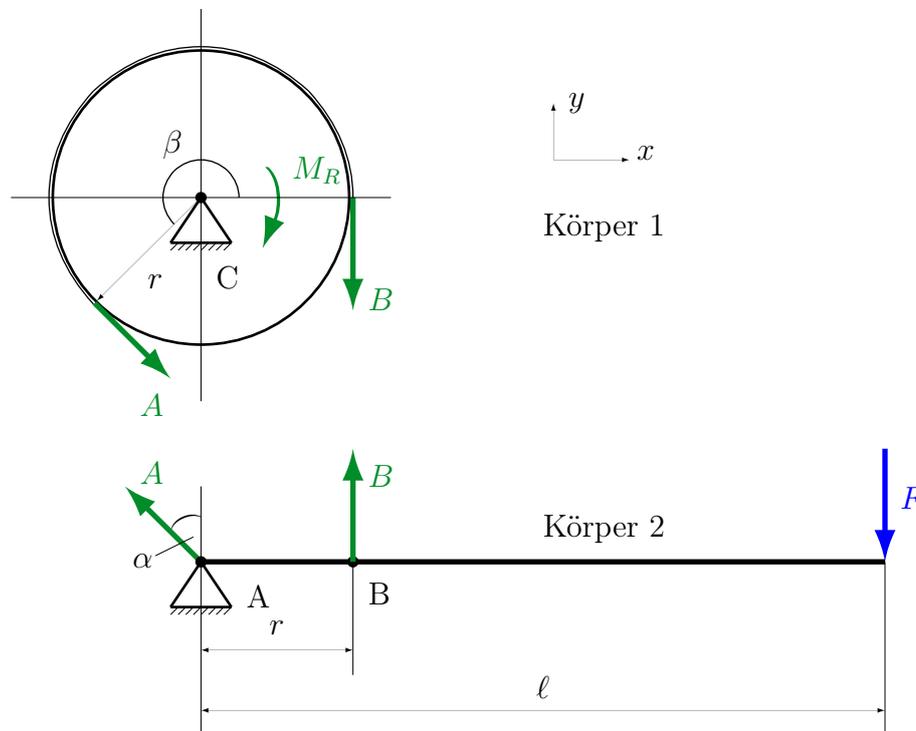
Unabhängig von der Drehrichtung ist der Umschlingungswinkel  $\beta$  (s. Schnittbild).

Betrachten Sie die Angabe  $\alpha = 45^\circ$  in der Aufgabenstellung als gemeine Falle. Natürlich ist  $\alpha$  in diesem Fall nicht der Umschlingungswinkel, wir müssen selbst aktiv werden, weshalb der Umschlingungswinkel diesmal  $\beta$  heißt.

$$\beta = 225^\circ, \quad \beta = \frac{5}{4}\pi, \quad \beta = 3,93$$

**Rechtslauf,  $M_R$** 

Freischneiden



Erneut haben wir die beiden zweiwertigen Lager A und C nicht freigeschnitten, da die Lagerkräfte dort uninteressant sind. Wir dürfen so vorgehen, sofern wir nur Momentengleichgewichte aufstellen und die Lagerungspunkte als Bezugspunkt wählen.

$$\begin{aligned} \text{MG Körper 1} \quad \sum M_{[C]} \equiv 0 &= -M_R - B r + A r \\ (1) \quad M_R &= r (A - B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MG Körper 2} \quad \sum M_{[A]} \equiv 0 &= B r - F \ell \\ (2) \quad B &= F \frac{\ell}{r} \end{aligned}$$

A und B sind die Seilkräfte, die über die Euler-Eytelweinsche Gleichung in Verbindung gebracht werden müssen. Wir suchen die große/kleine Kraft.

Zwei Möglichkeiten haben wir. Eine anschauliche und eine mathematische.

1. Die Walze möchte das Band mitnehmen. Bei Rechtslauf erzeugt sie daher bei den Kräften  $A$  größere Kräfte, bei den Kräften  $B$  geringere Kräfte, also  $A > B$
2. Im MG an Körper 1 haben wir alles 'richtig' gemacht.  $M_R$  ist positiv, denn wäre es negativ, hätten wir ein  $M_L$ . Die Seilkräfte  $A$  und  $B$  sind ziehend eingezeichnet (nur Idioten schieben an Seilen). Gleichung (1) zeigt uns daher

$$A > B$$

$$S_1 < S_2 \cdot e^{\mu_0 \alpha} \quad \text{mit} \quad S_1 > S_2$$

$$(3) \quad A < B \cdot e^{\mu_0 \beta} \quad \text{mit} \quad A > B$$

Beim Einsetzen von  $A$  aus Gleichung (3) und  $B$  aus Gleichung (2) in Gleichung (1) haben wir das Problem, dass Gleichung (3) eine Ungleichung ist. Unter zwei Bedingungen dürfen wir vorübergehend aus der Ungleichung (3) eine Gleichung machen. Wir müssen eine Grenzwertbetrachtung ankündigen, und zum Schluss beenden und das Ungleichheitszeichen durch Plausibilität rekonstruieren.

Beginn Grenzbetrachtung

$$(1) \quad M_R = r(A - B)$$

$$\text{mit (3)} \quad M_R = r(B e^{\mu_0 \beta} - B)$$

$$M_R = r B (e^{\mu_0 \beta} - 1)$$

$$\text{mit (2)} \quad M_R = F \ell (e^{\mu_0 \beta} - 1)$$

$$M_R = F \ell (e^{0,2 \cdot 3,93} - 1)$$

$$M_R = 1,2 \cdot F \ell$$

Ende Grenzbetrachtung. Das Moment  $M_R$  hat einen Höchstwert, daher gilt

$$M_{Rmax} < 1,2 \cdot F \ell$$

**Linkslauf,  $M_L$**

Neues Schnittbild, neue Suche nach großer/kleiner Kraft, neue Momentengleichgewichte bei gleichem Umschlingungswinkel  $\beta$

$$M_{Lmax} < F \ell (1 - e^{-\mu_0 \beta})$$

$$M_{Lmax} < 0,54 \cdot F \ell$$

### 3.4. Zusammenfassung der Coulombschen/trockenen Reibung

|              | Ebene Reibung   | Seilreibung                                       |
|--------------|-----------------|---|
| Haftreibung  | $R_0 < \mu_0 N$ | $S_1 < S_2 \cdot e^{\mu_0 \alpha}$<br>$S_1 > S_2$ |
| Gleitreibung | $R = \mu N$     | $S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \alpha}$<br>$S_1 > S_2$   |

Bei Haftreibung werden  $R_0$  und  $N$  bzw.  $S_1$  und  $S_2$  aus Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Mit Hilfe der Haftbedingungen (Ungleichungen) kann lediglich überprüft werden, ob das System hält oder rutscht. Die Haftbedingung ist keine zusätzliche Bestimmungsgleichung. Lediglich in den Fällen, in denen die Grenzen untersucht werden sollen (bis zu welchem Winkel ..., wie groß muss  $\mu_0$  mindestens sein ...), liefert die Haftbedingung ein Rechenergebnis.

Bei Gleitreibung stellen die Reibungsgesetze zusätzlich Bestimmungsgleichungen dar. ■

# Teil II.

## Festigkeitslehre

### Vorbemerkung

Die Festigkeitslehre liefert Berechnungsgrundlagen für die inneren Kräfte bei verformten Strukturen. Dies ist notwendig zur Dimensionierung der Strukturen.

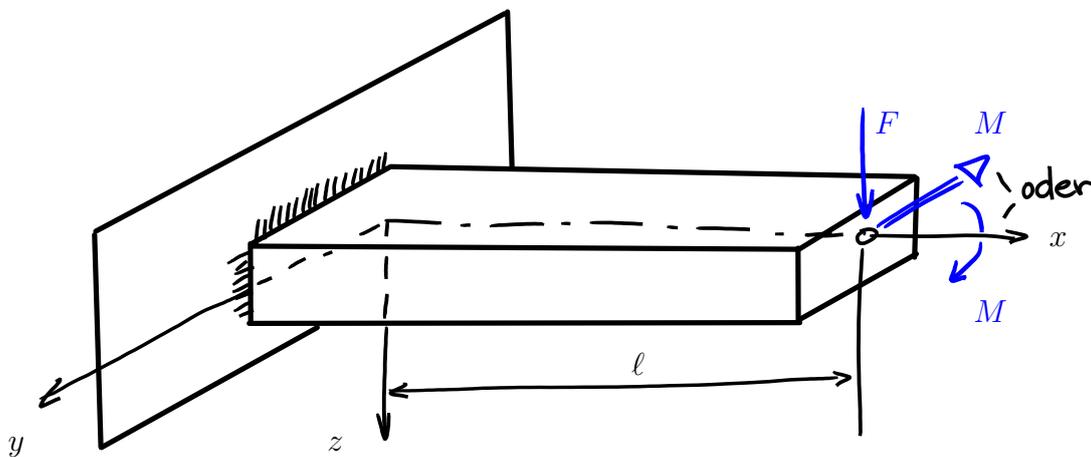
Die Verformungen werden hinreichend langsam erzeugt. Anschließend ist der verformte Körper wieder in Ruhe, so dass die bekannten Gleichgewichtsbedingungen gelten.

Generell gilt: Es werden nur schlanke Tragwerke wie Stäbe, Balken und Wellen betrachtet.

Schlank heißt, eine der drei Dimensionen einer Struktur ist deutlich größer als die anderen beiden.

## 1. Schnittkräfte und Schnittmomente an schlanken Strukturen

Veranschaulichung der Problemstellung am einseitig eingespannten Rechteckbalken.



Wir müssen uns ab jetzt an ein neues Koordinatensystem gewöhnen. Unverändert ist die  $x$ -Achse die Balkenachse. Sie ist nach wie vor die Verbindungslinie aller Schwerpunkte

der Querschnittsflächen unseres Balkens. Neu ist für uns die  $z$ -Achse, die nach unten zeigt (früher  $y$  nach oben). Die  $y$ -Achse zeigt neuerdings aus der Zeichenebene heraus. Lediglich die Tatsache, dass ab nun gilt „nach unten ist positiv“, ändert sich nicht viel. Die „Uhrzeigerregel“ gilt im neuen Koordinatensystem unverändert. Gegen den Uhrzeigersinn bleibt eine positive Bewegungsrichtung.

Warum ein neues Koordinatensystem? Balken werden häufig durch Gewichtskräfte nach unten durchgebogen. Aus diesem Grunde hat sich ein Koordinatensystem eingebürgert, bei dem eine Koordinatenrichtung nach unten zeigt. Da das fast alle so machen, schließen wir uns an.

**Problem:** Ermittlung von Schnittkräften und Schnittmomenten an jeder beliebigen Stelle  $x$  des Balkens.

**Lösung:**

1. Ermittlung der Lagerreaktionen unter Annahme eines starren Balkens.
2. Zerschneiden des Balkens an einer beliebigen Stelle  $x$ , Anbringen von Schnittkräften

### 1.1. Beanspruchungsgrößen bei Biegung:

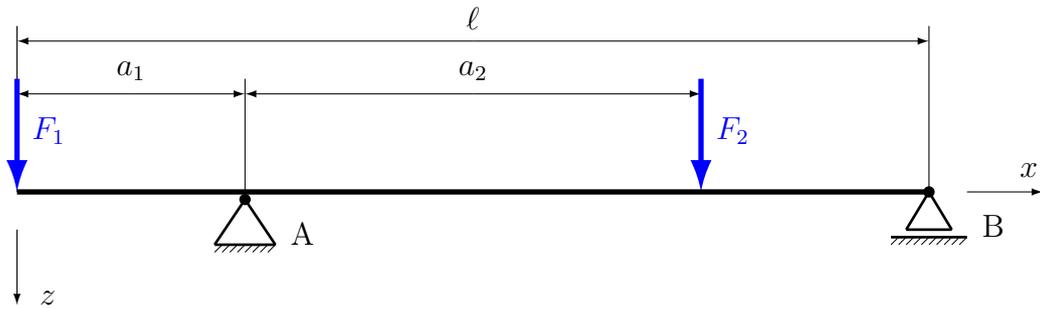
Es gibt zunächst nur vertikale Einzelkräfte der  $x$ - $z$ -Ebene. Die Balkenlängsachse ( $x$ -Achse) liegt in dieser Ebene. Folgende Beanspruchungsgrößen treten auf:

- Biegemoment  $M_{by} \neq 0$ ,
- Schub  $Q_z \neq 0$ ,
- gelegentlich entsteht Zug, dann gilt  $N \neq 0$ .

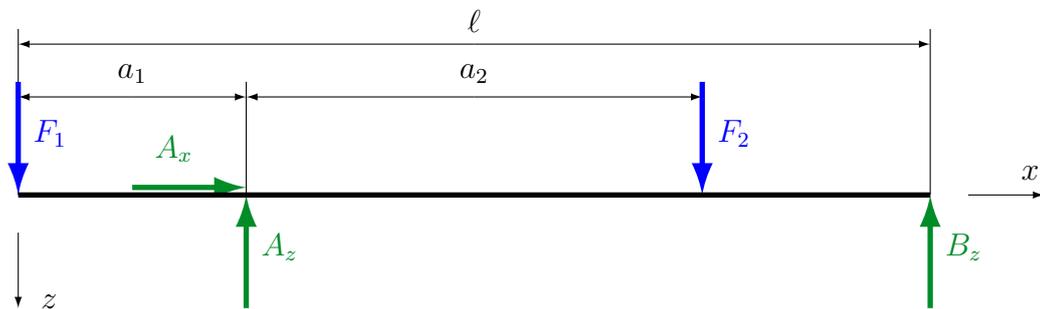
Andere Beanspruchungsgrößen (es gäbe noch  $M_{bz}$ ,  $M_t$ ,  $Q_y$ ) treten nicht auf. Aus diesem Grund kürzen wir ab. Künftig gilt  $M_{by} = M_b$ ,  $Q_z = Q$ .

Beispiel

Gegeben: Äußere Kräfte, Geometrien. Gesucht: Beanspruchungsgrößen.



## 1. Lagerreaktionen



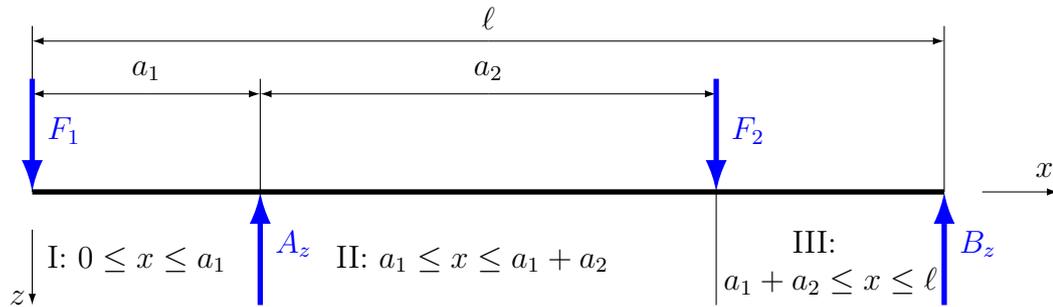
$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sum X &\equiv 0 = A_x \\
 (2) \quad \sum Z &\equiv 0 = F_1 - A_z + F_2 - B_z \\
 (3) \quad \sum M_{[A]} &\equiv 0 = F_1 a_1 - F_2 a_2 + B_z (\ell - a_1)
 \end{aligned}$$

Strategie: (3)  $\rightarrow$   $B_z$ ,  $B_z$  in (2)  $\rightarrow$   $A_z$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad B_z (\ell - a_1) &= -F_1 a_1 + F_2 a_2 \\
 B_z &= \frac{F_2 a_2 - F_1 a_1}{\ell - a_1} \\
 B_z \text{ in (2)} \quad A_z &= F_1 + F_2 - \frac{F_2 a_2 - F_1 a_1}{\ell - a_1}
 \end{aligned}$$

Dies war bisher Stoff aus TM I. Da die Ergebnisse für  $A_z$ ,  $B_z$  recht umfangreich sind, werden wir nicht mit den Ergebnissen, sondern mit  $A_z$ ,  $B_z$  weiter rechnen. Erst jetzt kommen die neuen Schritte, die wir kennenlernen werden.

## 2. Einteilung in stetige Bereiche (künftig abgekürzt: Bereichseinteilung)

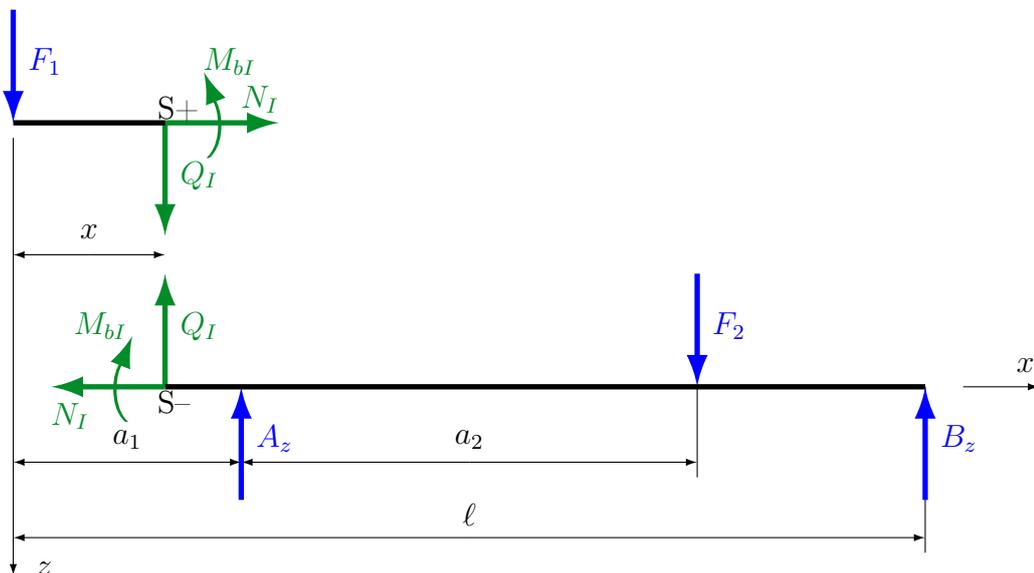


Gründe für eine Bereichsgrenze sind

- Anfang und Ende der Struktur
- Lager
- Einzelkraft oder Einzelmoment
- Anfang und Ende einer Streckenlast (noch unbekannt)
- Abwinkelungen der Struktur

All diese aufgezählten Gründe stellen eine Unstetigkeit im Verlauf der Struktur dar. Daher müssen alle nachfolgenden Schritte für jeden Bereich gesondert durchgeführt werden.

3. Schneiden im Bereich I an der Stelle  $x$



Beim Anbringen der Beanspruchungsgrößen  $N$ ,  $Q$ ,  $M_b$  sind die Regeln zum positiven und negativen Schnittufer zu beachten.

Bisher waren wir ziemlich frei in der Wahl der Pfeilrichtung von Kräften und Momenten. Lediglich beim Thema Reibung gab es eine Ausnahme. Jetzt kommt eine weitere Ausnahme hinzu. Bei den Beanspruchungsgrößen  $N$ ,  $Q$ ,  $M_b$  haben wir keine Wahl. Wir definieren positive und negative Schnittufer. An dem positiven tragen wir die Beanspruchungsgrößen  $N$ ,  $Q$ ,  $M_b$  in positiver Koordinatenrichtung an, am negativen in negative Richtung. Klingt logisch, nur, woran erkenne ich ein pos./neg. Schnittufer? Aus einem positiven Schnittufer kommt die  $x$ -Achse heraus, in ein negatives Schnittufer sticht die  $x$ -Achse hinein. Im Bild ist oben das positive, unten das negative Schnittufer. Sie sind markiert mit  $S+$  und  $S-$

Warum diese Einschränkung? Wir werden aus den Beanspruchungsgrößen  $N$ ,  $Q$ ,  $M_b$  demnächst Spannungen berechnen. Für die gibt es – im Gegensatz zu Kräften – eine feste Vorzeichenregelung (Zugspannungen sind positiv, Druckspannungen sind negativ). Damit die Spannungen vorzeichenkorrekt berechnet werden können, fangen wir jetzt schon damit an, die Beanspruchungsgrößen regelgerecht anzutragen. Bei den Lagerreaktionen können wir trotzdem Kräfte und Momente antragen, wie es uns gefällt.

#### 4. Kräfte- und Momentengleichgewicht um $S$ , hier links

Es ist immer eine hervorragende Idee, das Momentengleichgewicht um die Schnittstelle aufzustellen. Das linke Balkenteil wählen wir, weil es sehr viel überschaubarer ist, als das rechte. Faulheit siegt.

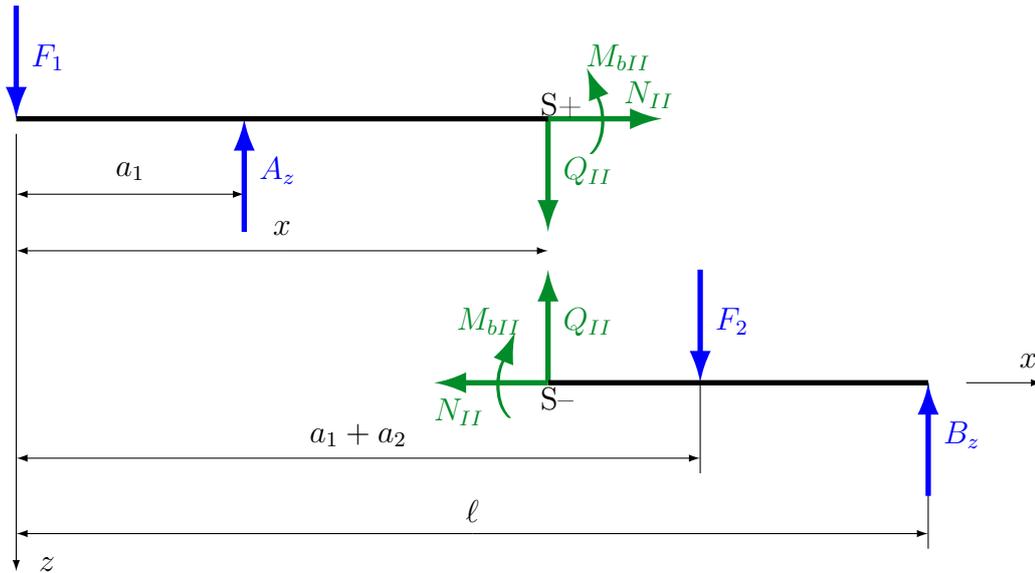
$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = N_I \\ \sum Z &\equiv 0 = F_1 + Q_1 \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_{bI} + F_1 x\end{aligned}$$

Nur eine Unbekannte in jeder Gleichung, das ist schön. So wird es immer sein, wenn wir das Momentengleichgewicht um die Schnittstelle aufstellen. Farbmarkierungen können also bei diesem Schritt künftig entfallen.

$$N_I = 0, \quad Q_I = -F_1, \quad M_{bI} = -F_1 x$$

Nun müssen wir den Bereich II behandeln. Wir gehen zwei Schritte zurück und beginnen von vorn

#### 3. Schneiden im Bereich II an der Stelle $x$



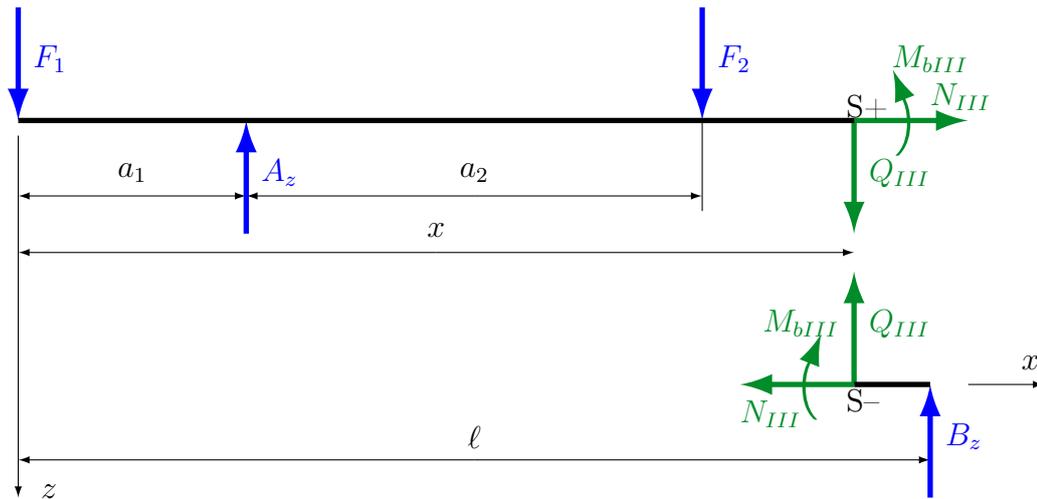
## 4. KG und MG um S, hier links

Erneut wählen wir das linke Balkenteil. An linken Balkenteilen sind die Hebelarme in der Regel etwas einfacher zu finden.

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = N_{II} \\ \sum Z &\equiv 0 = F_1 - A_z + Q_{II} \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_{bII} + F_1 x - A_z (x - a_1)\end{aligned}$$

$$N_{II} = 0, \quad Q_{II} = A_z - F_1, \quad M_{bII} = A_z (x - a_1) - F_1 x$$

3. Schneiden im Bereich III an der Stelle  $x$



## 4. KG und MG um S, hier rechts

Diesmal wählen wir das sehr überschaubare rechte Balkenteil. Die Hebelarme werden wir schon schaffen.

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = -N_{III} \\ \sum Z &\equiv 0 = -Q_{III} - B_z \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_{bIII} + B_z(\ell - x)\end{aligned}$$

$$N_{III} = 0, \quad Q_{III} = -B_z, \quad M_{bIII} = B_z(\ell - x)$$

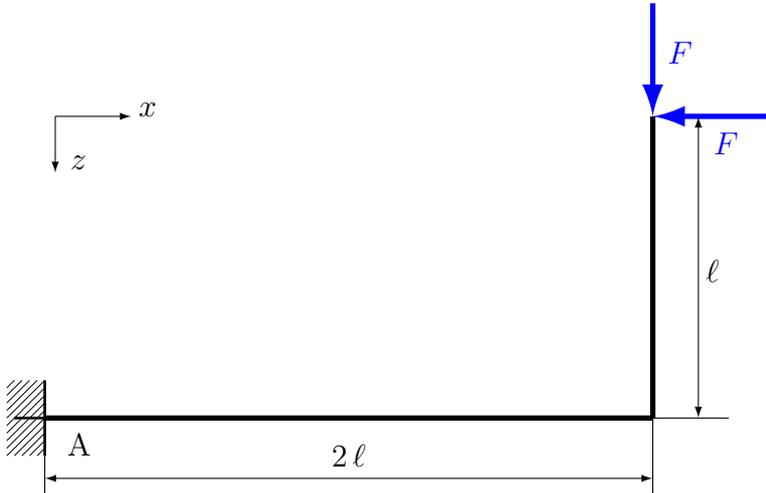
Wäre dies eine Übungs- oder Klausuraufgabe, so müssten wir die Lagerreaktionen  $A_z$ ,  $B_z$  einsetzen, um auf verwertbare Ergebnisse zu kommen. Wir verzichten ausnahmsweise hier darauf und hoffen, dass solche Aufgaben etwas einfacher sind. Schauen wir uns eine Übungsaufgabe an.

■

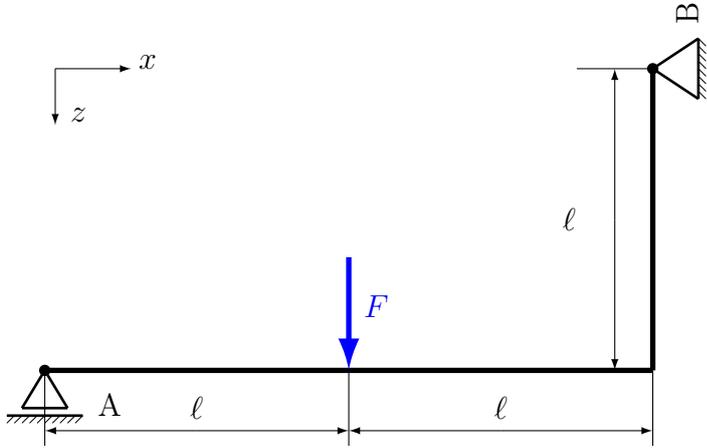
1.1.1. Übung, der Haken

Für die folgenden Anordnungen sind die Beanspruchungsgrößen zu ermitteln und graphisch darzustellen.

a)

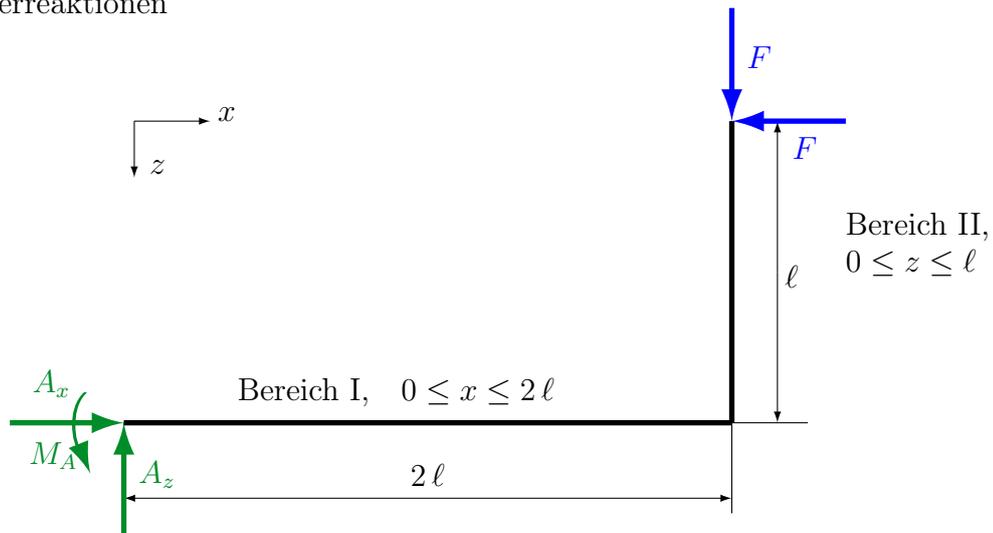


b)



a)

1. Lagerreaktionen



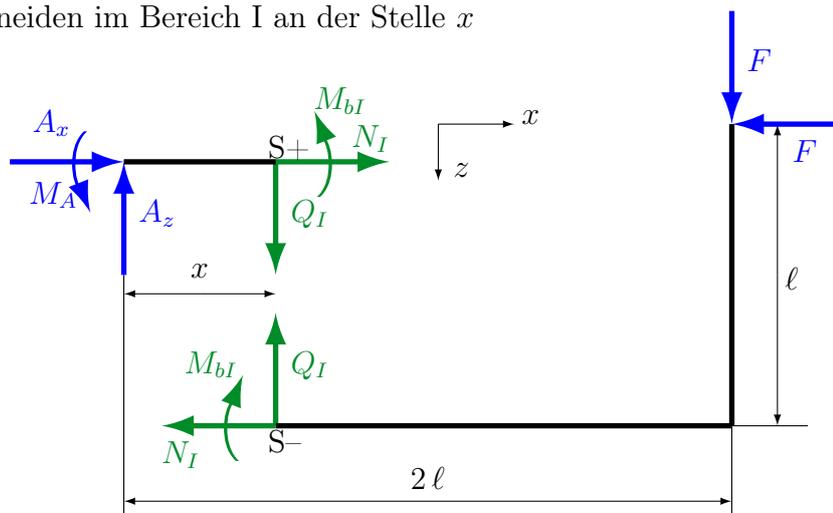
$$\begin{aligned} \sum X \equiv 0 &= A_x - F \\ \sum Z \equiv 0 &= -A_z + F \\ \sum M_{[A]} \equiv 0 &= M_A + F \ell - F \cdot 2 \ell \\ A_x &= F, \quad A_z = F, \quad M_A = F \ell \end{aligned}$$

2. Bereichseinteilung

Im obigen Bild sind die Bereiche bereits vermerkt. Grund für die Bereichsgrenze ist die Abwinklung. Im Bereich I wird der Balkenverlauf durch  $x$  beschrieben, im Bereich II durch  $z$ . Dies erfolgt übrigens von oben nach unten. Der Wechsel von  $x$  auf  $z$  stellt eine Unstetigkeit dar.

Bereich I:  $0 \leq x \leq 2 \ell$ ,    Bereich II:  $0 \leq z \leq \ell$

3. Schneiden im Bereich I an der Stelle  $x$



## 4. KG und MG um S hier links

Das linke Balkenteil ist überschaubarer. Auch die Hebelarme sind einfach zu ermitteln. Lediglich das Vorhandensein von zwei Momenten an unterschiedlichen Stellen an einem Teil bedarf unserer Aufmerksamkeit (oder gerade nicht, wie wir gleich sehen werden).

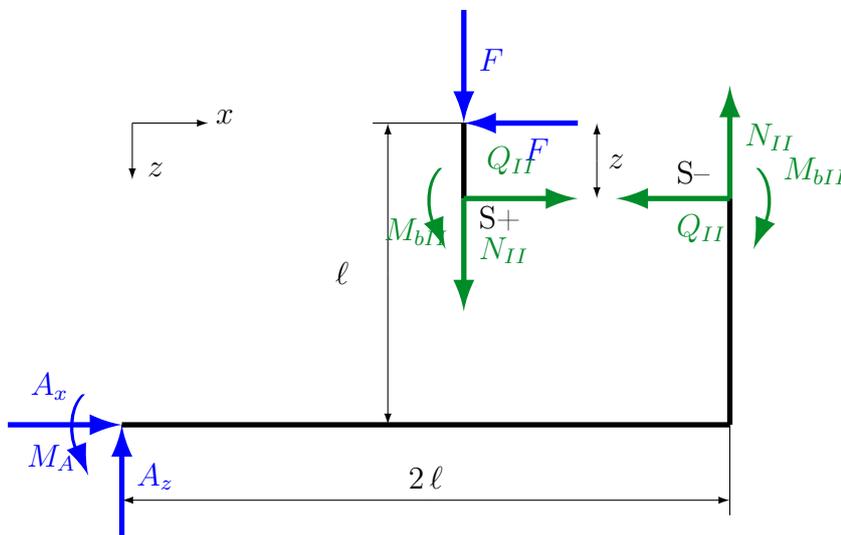
$$\begin{aligned}\sum X \equiv 0 &= A_x + N_I \\ \sum Z \equiv 0 &= -A_z + Q_I \\ \sum M_{[S]} \equiv 0 &= M_A + M_{bI} - A_z x\end{aligned}$$

Die beiden Momente  $M_A$ ,  $M_{bI}$  werden schlicht aufsummiert. Der Abstand  $x$  zwischen den beiden spielt überhaupt keine Rolle. In TM I haben wir gehört, dass Momente beliebig verschoben werden können. Wehe hier verpasst jemand einem Moment noch einen 'Hebelarm  $x$ '. Das gibt einen sehr hässlichen Einheitenfehler, der einem alles versaut.

$$N_I = -A_x, \quad Q_I = A_z, \quad M_{bI} = A_z x - M_A$$

Mit den bekannten Lagerreaktionen gilt:

$$N_I = -F, \quad Q_I = F, \quad M_{bI} = F(x - \ell)$$

3. Schneiden im Bereich II an der Stelle  $z$ 

## 4. KG und MG um S hier oben

Unser Balkenstück verläuft ungewohnt.  $N$  und  $Q$  tauchen vertauscht auf. Außerdem ist die Laufvariable  $z$ .

$$\sum X \equiv 0 = -F + Q_{II}$$

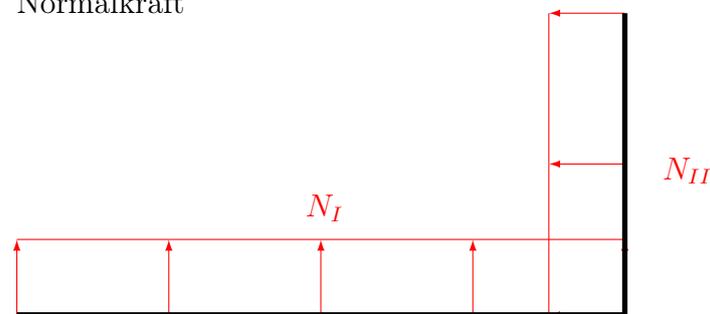
$$\sum Z \equiv 0 = F + N_{II}$$

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = M_{bII} + Fz$$

$$Q_{II} = F, \quad N_{II} = -F, \quad M_{bII} = -Fz$$

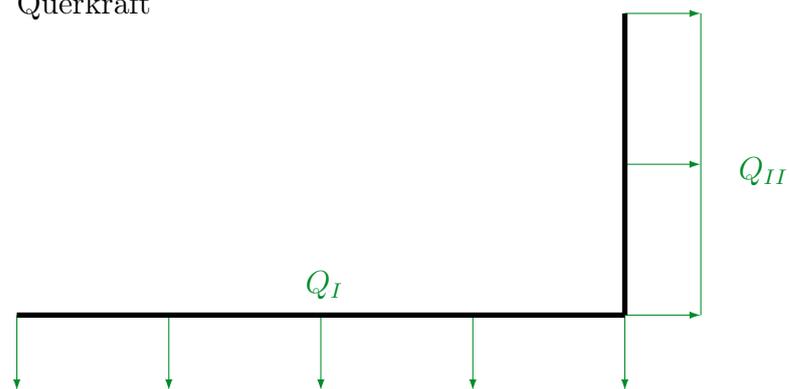
## 5. Graphische Darstellung der Beanspruchungsgrößen, nach unten ist positiv!

Normalkraft



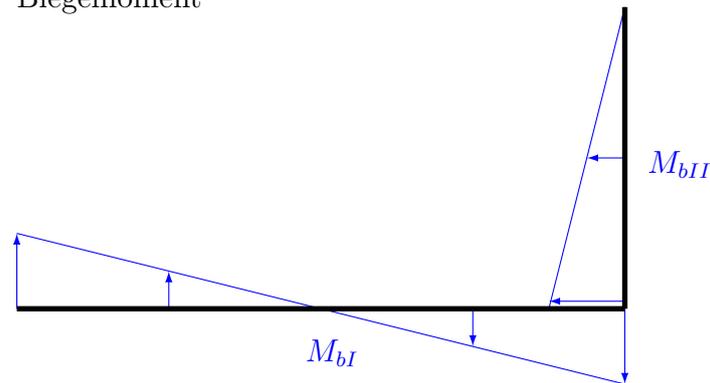
$$N_I = -F, \quad N_{II} = -F$$

Querkraft



$$Q_I = F, \quad Q_{II} = F$$

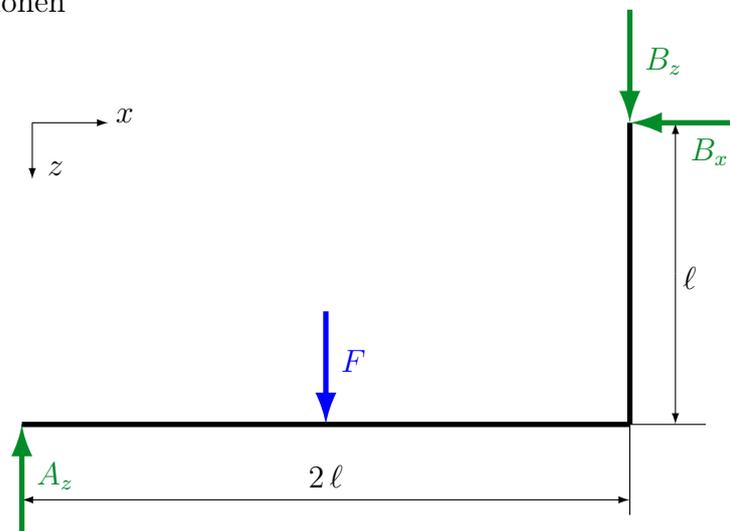
Biegemoment



$$M_{bI}(x=0) = -F\ell, \quad M_{bI}(x=2\ell) = +F\ell, \quad M_{bII}(z=0) = 0, \quad M_{bII}(z=\ell) = -F\ell.$$

b)

1. Lagerreaktionen



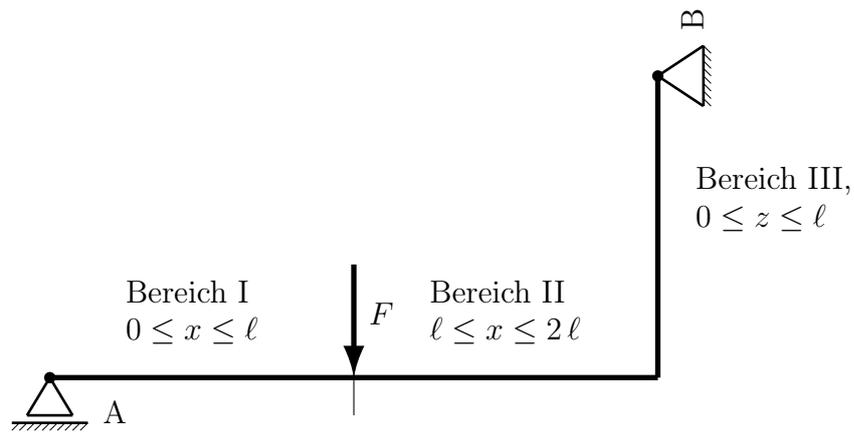
$$\sum X \equiv 0 = B_x$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F + B_z$$

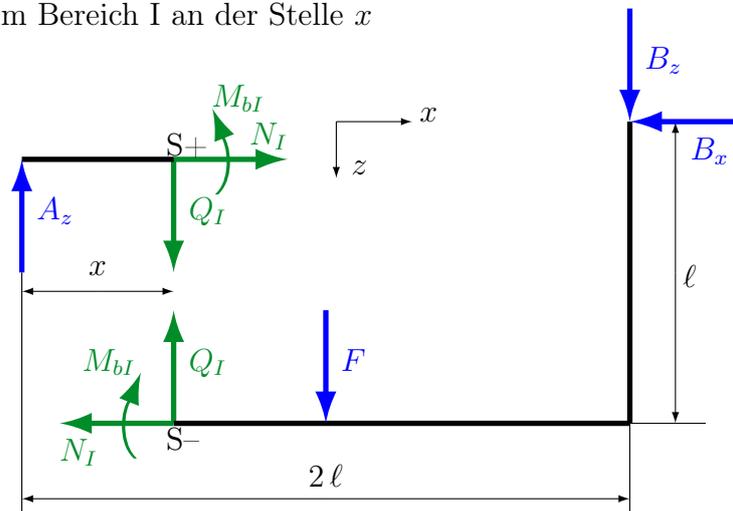
$$\sum M_{[B]} \equiv 0 = F\ell - A_z \cdot 2\ell$$

$$B_x = 0, \quad A_z = \frac{F}{2}, \quad B_z = -\frac{F}{2}$$

## 2. Bereichseinteilung



Drei Bereiche, na viel Spaß

3. Schneiden im Bereich I an der Stelle  $x$ 

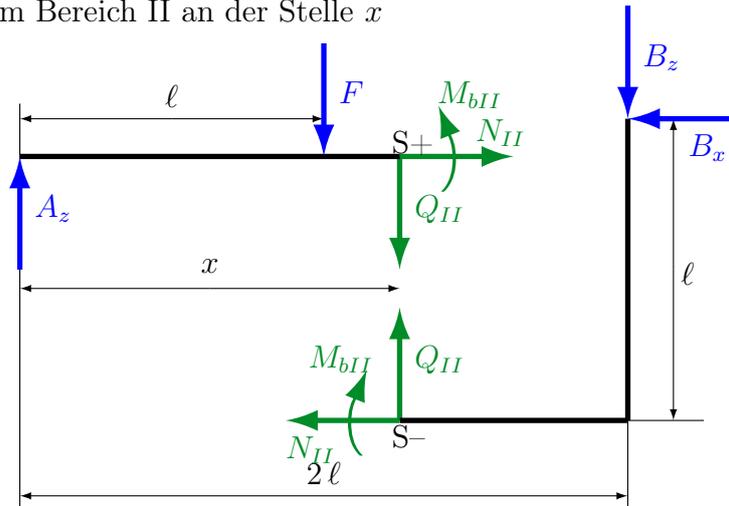
## 4. KG und MG um S hier links

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = N_I \\ \sum Z &\equiv 0 = -A_z + Q_I \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_{bI} - A_z x\end{aligned}$$

Mit den bekannten Lagerreaktionen ergibt sich

$$N_1 = 0, \quad Q_1 = \frac{F}{2}, \quad M_{bI} = \frac{F x}{2}$$

3. Schneiden im Bereich II an der Stelle  $x$



4. KG und MG um S hier links

$$\sum X \equiv 0 = N_{II}$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F + Q_{II}$$

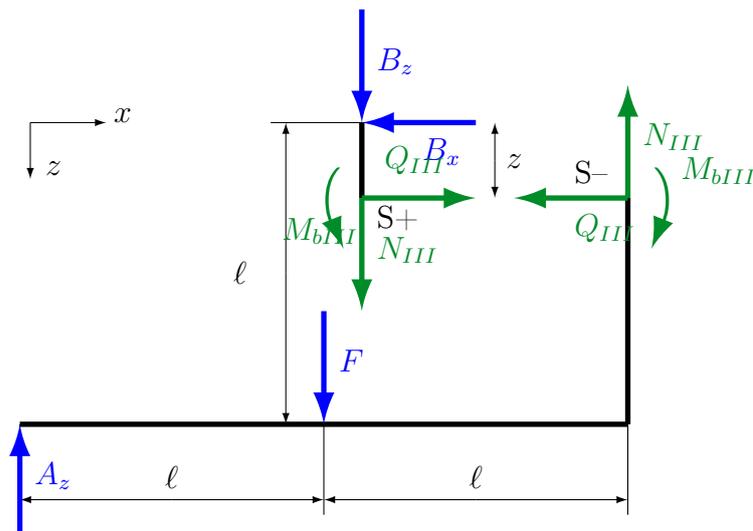
$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = M_{bII} - A_z x + F(x - \ell)$$

$$N_{II} = 0, \quad Q_{II} = A_z - F, \quad M_{bII} = A_z x - F(x - \ell)$$

Mit den bekannten Lagerreaktionen ergibt sich

$$N_{II} = 0, \quad Q_{II} = -\frac{F}{2}, \quad M_{bII} = F \left( \ell - \frac{x}{2} \right)$$

3. Schneiden im Bereich III an der Stelle  $z$



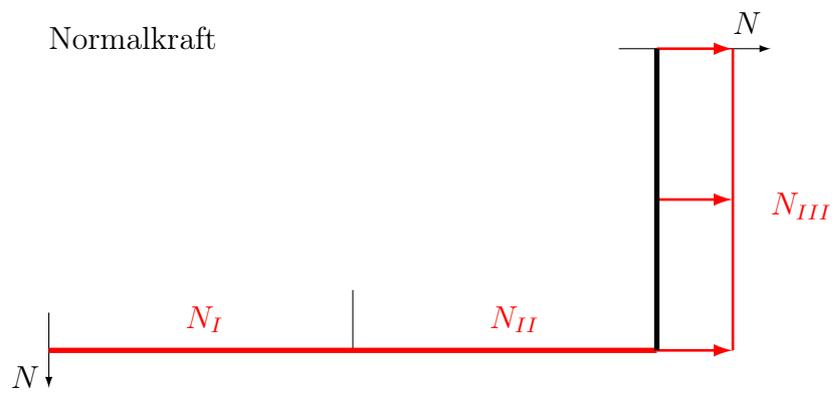
4. KG und MG um S hier oben

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = -B_x + Q_{III} \\ \sum Z &\equiv 0 = B_z + N_{III} \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_{bIII} + B_x z\end{aligned}$$

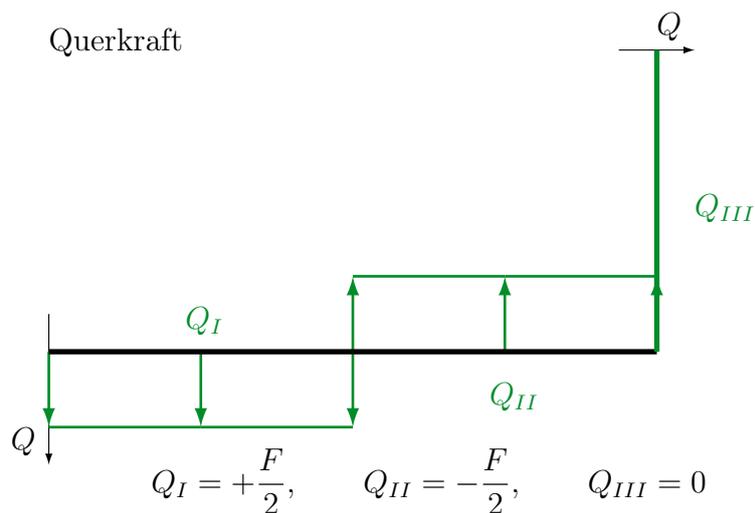
Mit den bekannten Lagerreaktionen ergibt sich

$$Q_{III} = 0, \quad N_{III} = \frac{F}{2}, \quad M_{bIII} = 0$$

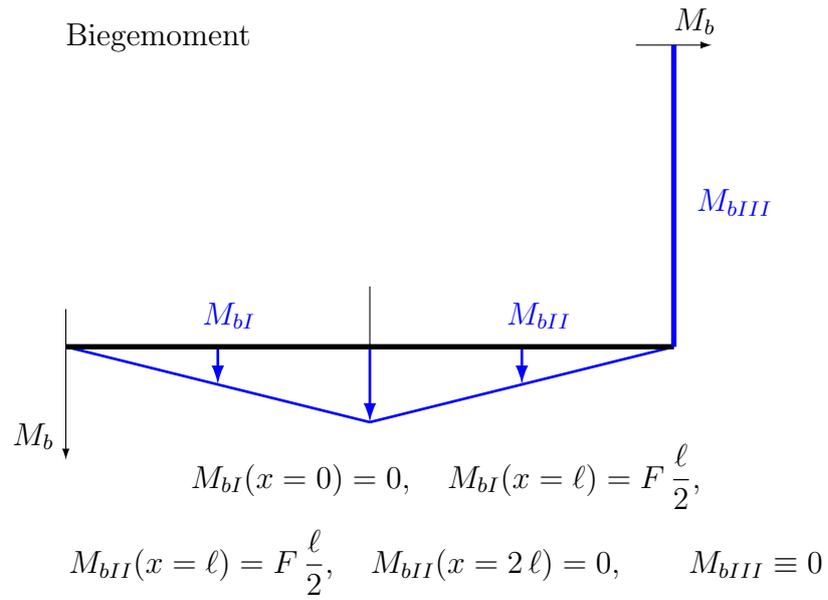
5. Graphische Darstellung der Beanspruchungsgrößen, [nach unten ist positiv!](#)



$$N_I = 0, \quad N_{II} = 0, \quad N_{III} = \frac{F}{2}$$



$$Q_I = +\frac{F}{2}, \quad Q_{II} = -\frac{F}{2}, \quad Q_{III} = 0$$



■

## 1.2. Kontinuierliche Belastung bei Biegung

Wir bleiben bei der Ermittlung der Beanspruchungsgrößen  $N$ ,  $Q$ ,  $M_b$  bei Biegung, wollen aber eine neu Art der Belastung von Balken kennenlernen. Bisher hatten wir Einzelkräfte, die punktförmig angreifen.

Gelegentlich tauchen aber Kraftverteilungen auf. Denken Sie beispielsweise an die Schneelast auf einem Flachdach. Bei diesem Beispiel verteilt sich die Gesamtgewichtskraft allen Schnees auf eine Fläche. Zudem kann es sein, dass die Schneehöhe nicht überall gleich ist, da es Verwehungen gibt.

Weg von diesem Beispiel. Wir betrachten hier schlanke Strukturen mit 'Schneelast' (denken Sie an ein schmales Brett als Biegebalken). Über die Balkenlängsachse mag die Schneehöhe so variieren, dass das berücksichtigt werden muss. Hingegen kann die Variation der Schneehöhe über die geringe Balkenbreite gut vernachlässigt werden. Wir werden die Gesamt'schneelast' nicht auf eine Fläche, sondern nur auf die Balkenlängsachse beziehen.

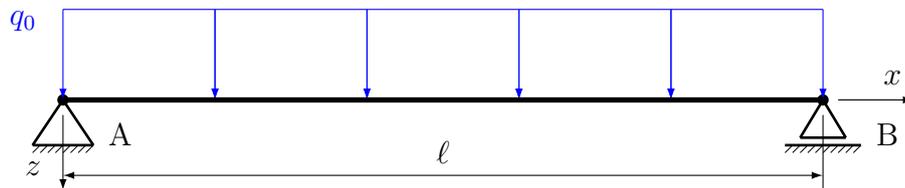
Statt 'Kraft pro Fläche' beim Flachdach werden wir mit Kraft pro Strecke rechnen. Das ganze nennen wir Streckenlast.

Streckenlast: Formelzeichen  $q$ , Einheit N/m (Newton pro Meter).

Wir werden jetzt die Behandlung von Streckenlasten kennenlernen. Dies erfolgt am Beispiel einer Übungsaufgabe.

## 1.2.1. Übung, Streckenlast 2, 1

Wir behandeln einen Biegebalken mit Streckenlast. Erneut sind die Beanspruchungsgrößen  $N$ ,  $Q$ ,  $M_b$  gesucht. Wir betrachten eine Streckenlast  $q_0$ , die über die gesamte Balkenlänge konstant ist.

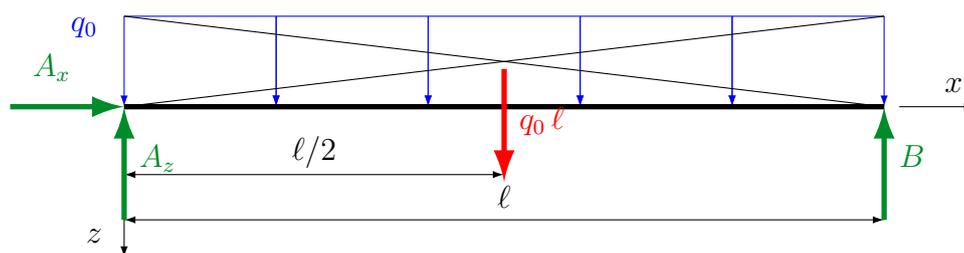


Gegeben:  $q_0$ ,  $l$ , gesucht: Beanspruchungsgrößen.

Bei der sehr rustikalen Vorgehensweise, die hier vorgestellt wird, gibt es eine hässliche Fehlermöglichkeit. **Roter Text wird auf die Gefahren hinweisen**<sup>8</sup>.

## 1.) Lagerreaktionen

Wir fassen den „Flächeninhalt“ unserer Streckenlast als Äquivalent der Gesamtkraft auf, den die Streckenlast erzeugt. Wir haben hier eine rechteckförmige Streckenlast. Die Fläche eines Rechtecks berechnet sich aus dem Produkt der Kantenlängen. Bei uns ist die „Fläche“ der Streckenlast  $q_0 l$ . Sie repräsentiert die Gesamtkraft der Streckenlast. Wir lassen sie hilfsweise im Flächenschwerpunkt angreifen. Der Schwerpunkt wird mit den Diagonalen angedeutet. Er liegt auf halber Länge bei  $l/2$  (wichtig), die halbe Höhe ist völlig unwichtig (Kräfte können längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden). Die Lagerreaktionen **und nur die** werden wir mit der Ersatzkraft  $q_0 l$  bestimmen.



<sup>8</sup>Aus Zeitgründen wird hier nur die rustikale Methode mit Hilfskräften vorgeführt. Die vornehme Methode mit Integration über  $\xi$  wird in der Festigkeitslehre für Maschinenbau beschrieben.

$$\begin{aligned}\sum X \equiv 0 &= A_x \\ \sum Z \equiv 0 &= -A_z - B + q_0 \ell \\ \sum M_{[A]} \equiv 0 &= B \ell - q_0 \ell \cdot \frac{\ell}{2}\end{aligned}$$

Wir ziehen das Momentengleichgewicht vor, um zunächst  $B$  zu berechnen.

$$\begin{aligned}B \ell &= \frac{q_0 \ell^2}{2} \\ B &= \frac{q_0 \ell^2}{2 \ell}\end{aligned}$$

Jetzt gaaanz vorsichtig kürzen, da sind schon schlimme Sachen passiert.

$$B = \frac{q_0 \ell}{2}$$

Mit dem Ergebnis für  $B$  können wir aus dem KG in z-Richtung die Lagerreaktion  $A_z$  errechnen.

$$\begin{aligned}A_z &= -B + q_0 \ell \\ A_z &= -\frac{q_0 \ell}{2} + q_0 \ell \\ A_z &= q_0 \frac{\ell}{2}\end{aligned}$$

Der „Flächeninhalt“ der Streckenlast  $q_0 \ell$  verteilt sich hälftig auf die beiden Lager.

## 2.) Bereichseinteilung

Jetzt wird es gefährlich. Wir müssen die Ersatzkraft  $q_0 \ell$  an halber Balkenlänge auf jeden Fall jetzt entfernen. Denn für die Bereichseinteilung und alles Weitere ist sie nicht existent.

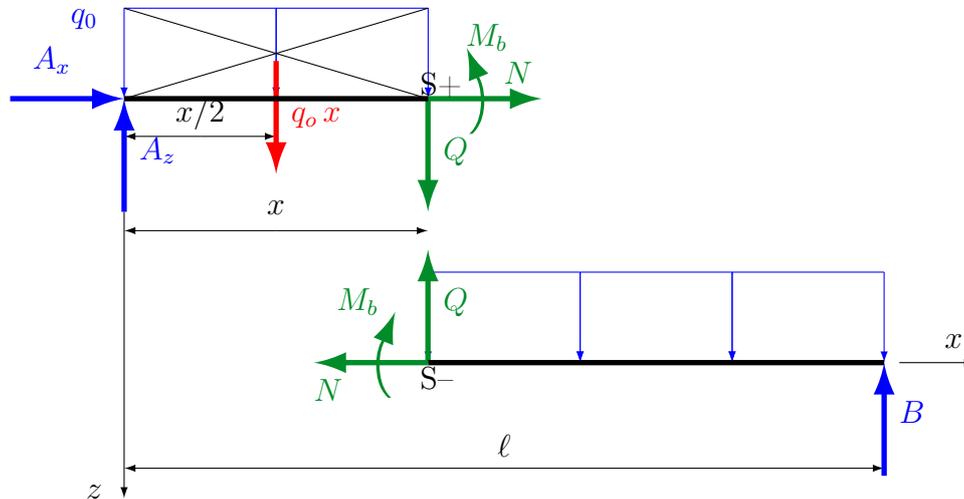
Nur ein Bereich, es gilt  $0 \leq x \leq \ell$

Würden wir wegen der Ersatzkraft  $q_0 \ell$  an halber Balkenlänge eine Bereichsgrenze einbauen, hätten wir ein riesen Problem. Wir müssten wegen der zwei Bereiche alles doppelt machen und alles wäre falsch. Wir haben nämlich keinen Balken mit Einzelkraft auf halber Länge.

## 3.) Schneiden im Bereich an der Stelle x

Wir werden das linke Teil betrachten, dort sind die Hebelarme leichter zu bestimmen. Natürlich beachten wir die Regeln mit dem positiven und negativen Schnittufer beim Einzeichnen von  $N$ ,  $Q$ ,  $M_b$ .

Nun kommt eine **neue Ersatzkraft**. Die Regeln sind die gleichen, nur das Ergebnis ist anders. Die Streckenlast auf dem linken, abgeschnittenen Balkenteil hat einen „Flächeninhalt“ von  $q_0 x$ . Das ist unsere neue Ersatzkraft, die wir bei  $x/2$  anbringen, egal von welcher Seite wir schauen.



4.) KG und MG um S

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = N \\ \sum Z &\equiv 0 = -A_z + Q + q_0 x \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = -A_z x + M_b + q_0 x \cdot \frac{x}{2}\end{aligned}$$

Von oben nach unten

$$\begin{aligned}N &= 0 \\ Q &= q_0 \cdot \frac{\ell}{2} - q_0 x \\ Q &= q_0 \left( \frac{\ell}{2} - x \right) \\ M_b &= A_z x - q_0 \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

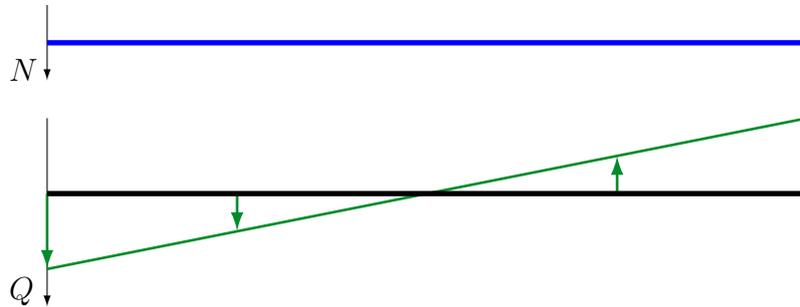
für  $A_z$  das Bekannte einsetzen

$$\begin{aligned}M_b &= q_0 \cdot \frac{\ell}{2} x - q_0 \frac{x^2}{2} \\ M_b &= \frac{q_0 x}{2} (\ell - x)\end{aligned}$$

Einheitencheck nicht vergessen.

## 5.) Graphische Dartsellung der Ergebnisse

Jetzt wollen wir die Verläufe der Beanspruchungsgrößen ermitteln.  $N$  ist einfach, die Normalkraft ist immer Null.  $Q$  ist linear von  $x$  abhängig. Daher werden wir an den Bereichsgrenzen  $x = 0$  und  $x = \ell$  Werte bestimmen und dann eine Linie ziehen.



$$Q(x=0) = \frac{q_0 \ell}{2}; \quad Q(x=\ell) = -\frac{q_0 \ell}{2}$$

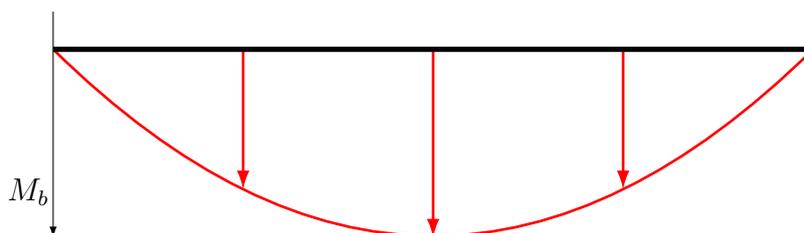
Wer hier Zahlenwerte vermisst, kann sich gerne selber welche schießen, z. B.  $q_0 = 100 \text{ N/m}$ ,  $\ell = 1 \text{ m}$ . Wir kommen dann auf  $50 \text{ N}$  und  $-50 \text{ N}$

Beim Biegemomentenverlauf stellen wir fest, dass  $x^2$  auftaucht (genau hingucken, wir haben vielleicht zu sehr ausgeklammert). Also haben wir parabolischen Verlauf. Wir werden wieder an den Bereichsgrenzen  $x = 0$  und  $x = \ell$  Werte bestimmen. Zusätzlich werden wir auf halber Balkenlänge  $x = \ell/2$  einen Wert bestimmen. Wenn wir dann immer noch nicht ahnen, wohin der Hase läuft, dann schauen wir noch bei  $x = \ell/4$  nach. Auf gehts, selber machen, hier gibt es nur Ergebnisse:

$$M_b(x=0) = 0; \quad M_b(x=\ell) = 0; \quad M_b\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = \frac{q_0 \ell^2}{8}; \quad M_b\left(x = \frac{\ell}{4}\right) = \frac{3 q_0 \ell^2}{32}.$$

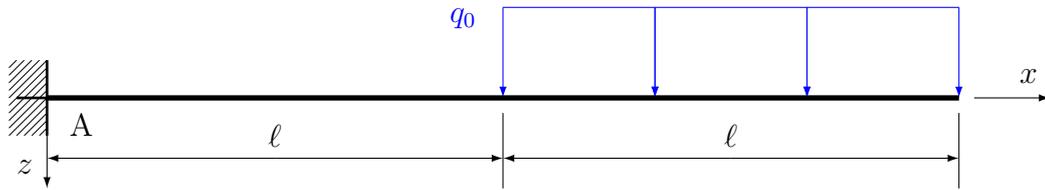
Mit unseren Phantasie-Zahlenwerten kommt dabei heraus:

$$M_b(x=0) = M_b(x=\ell) = 0; \quad M_b\left(x = \frac{\ell}{2}\right) = 12,5 \text{ Nm}; \quad M_b\left(x = \frac{\ell}{4}\right) = 9,3 \text{ Nm}.$$



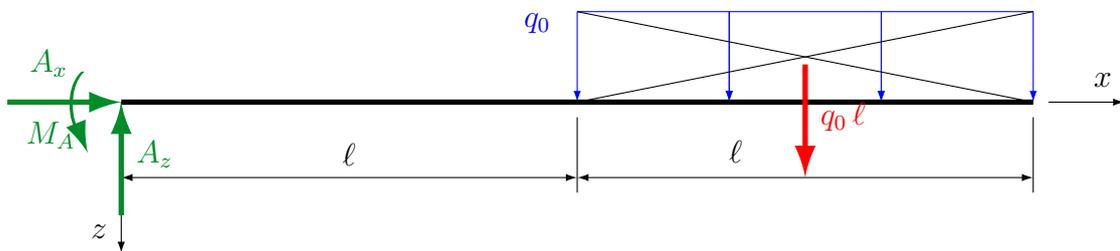
Raten Sie mal, wo der Balken kaputt geht, wenn er diese Last nicht tragen könnte. ■

## 1.2.2. Übung, Teilstreckenlast



Gegeben:  $q_0$ ,  $\ell$ , Gesucht: Beanspruchungsgrößen.

1. Lagerreaktionen Wir ersetzen die Streckenlast durch die Hilfskraft  $q_0 \ell$  im Schwerpunkt des Streckenlastsymbols (Rechteck).



$$\begin{aligned}\sum X \equiv 0 &= A_x \\ \sum Z \equiv 0 &= -A_z + q_0 \ell \\ \sum M_{[A]} \equiv 0 &= M_A - q_0 \ell \cdot \frac{3}{2} \ell\end{aligned}$$

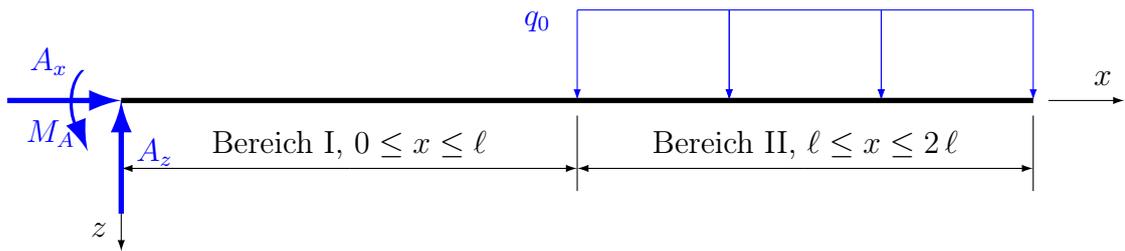
$$A_x = 0$$

$$A_z = q_0 \ell$$

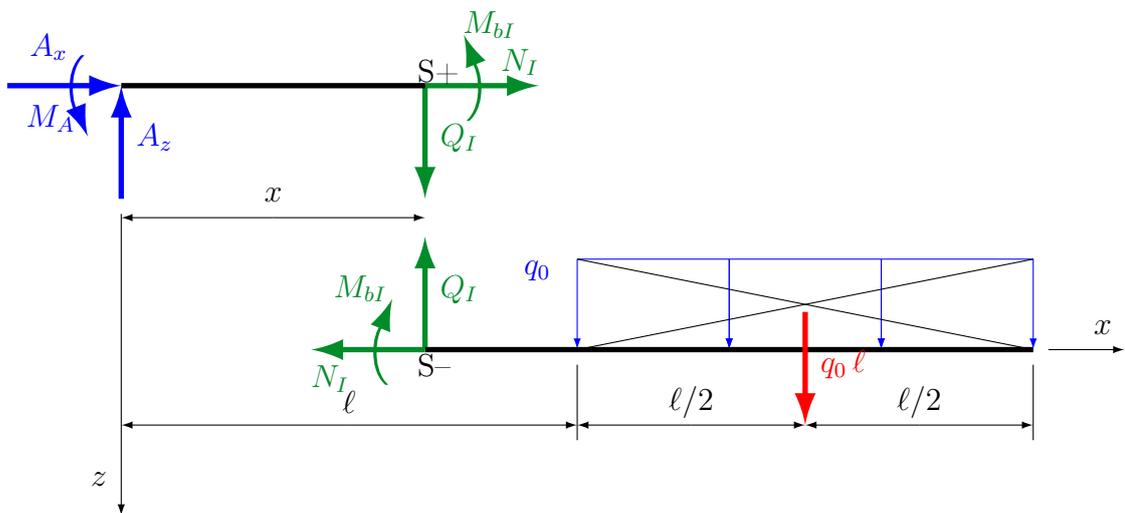
$$M_A = \frac{3}{2} q_0 \ell^2$$

2. Bereichseinteilung

An dieser Stelle müssen wir darauf achten, dass die Hilfskraft  $q_0 \ell$  entfernt wird. Sie darf kein Grund für eine Bereichsgrenze sein

3. Schneiden im Bereich I an der Stelle  $x$ 

Die Eintragung der neuen (alten) Hilfskraft im rechten Balkenteil hätten wir uns sparen können, da wir das linke Balkenteil betrachten werden. Übung schadet nicht, daher doch eingezeichnet.



## 4. KG und MG um S, hier links

$$\sum X \equiv 0 = N_I$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + Q_I$$

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = M_A + M_{bI} - A_z x$$

$$N_I = 0$$

$$Q_I = A_z$$

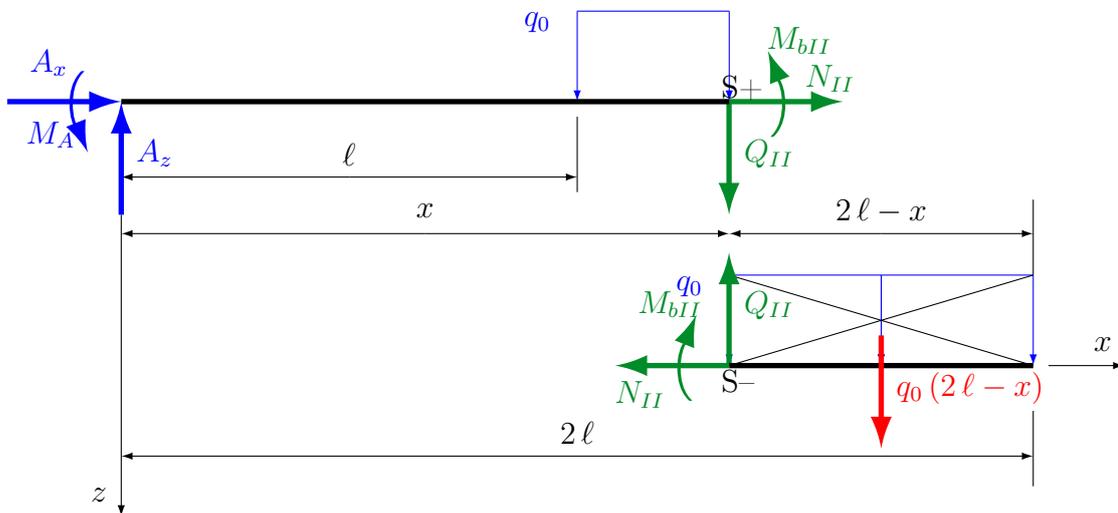
$$Q_I = q_0 \ell$$

$$M_{bI} = -M_A + A_z x$$

$$M_{bI} = -\frac{3}{2} q_0 \ell^2 + q_0 \ell x$$

$$M_{bI} = q_0 \ell \left( x - \frac{3}{2} \ell \right)$$

3. Schneiden im Bereich II an der Stelle  $x$



4. KG und MG um S, hier rechts

Im Zweifel nehmen wir immer das linke Balkenteil. Hier besteht aber gar kein Zweifel, dass das rechte Balkenteil weniger aufwändig ist. Also betrachten wir diesmal das rechte. Was im Schnittbild mangels Platz nicht eingezeichnet ist, ist der Hebelarm der Kraft  $q_0(2\ell - x)$  bezüglich der Schnittstelle. Versuchen Sie ihn zunächst selbst zu finden. Komplizierte Hebelarme sind der Preis, den wir bezahlen, wenn wir rechte Balkenteile betrachten.

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = -N_{II} \\ \sum Z &\equiv 0 = -Q_{II} + q_0 (2\ell - x) \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_{bII} - q_0 (2\ell - x) \cdot \frac{2\ell - x}{2}\end{aligned}$$

$$N_{II} = 0$$

$$Q_{II} = q_0 (2\ell - x)$$

$$\begin{aligned}M_{bII} &= -q_0 \frac{(2\ell - x)^2}{2} \\ M_{bII} &= q_0 \left( 2\ell x - 2\ell^2 - \frac{x^2}{2} \right)\end{aligned}$$

### 5. Graphische Darstellung

Wir fassen zusammen:

$$\begin{aligned}N_I &= 0, & Q_I &= q_0 \ell, & M_{bI} &= q_0 \ell \left( x - \frac{3}{2} \ell \right) \\ N_{II} &= 0, & Q_{II} &= q_0 (2\ell - x), & M_{bII} &= q_0 \left( 2\ell x - 2\ell^2 - \frac{x^2}{2} \right)\end{aligned}$$

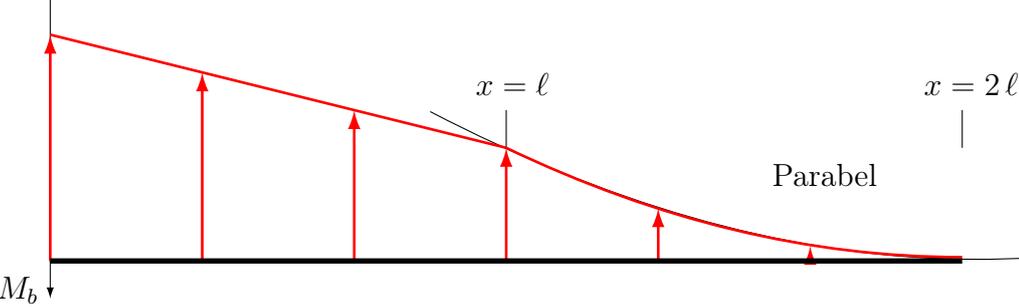
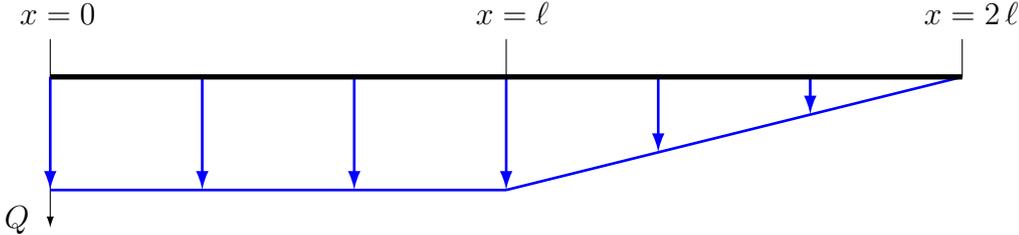
Die Normalkräfte sind beide Null und brauchen nicht dargestellt zu werden.

Die Querkraft im Bereich I ist konstant, im Bereich II verläuft sie linear mit  $x$ .

Das Biegemoment im Bereich I verläuft linear mit  $x$ , im Bereich II werden wir den Teil einer Parabel finden, da  $x^2$  auftaucht.

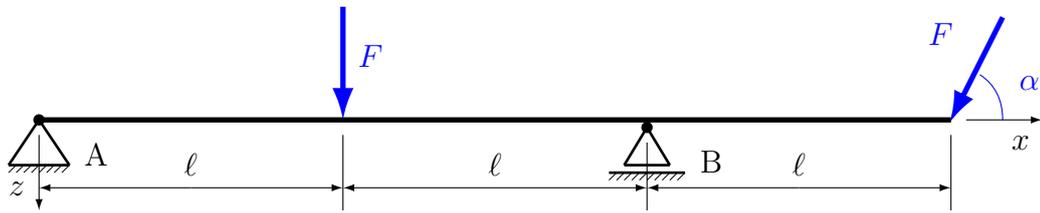
Sie berechnen an den Bereichsgrenzen Werte für  $Q$  und  $M_b$ . Zahlenwerte können Sie gerne erfinden. Bei dem Parabelast berechnen Sie noch einen Wert in Bereichsmittle bei  $x = 3/2 \ell$ . Falls das nicht reicht, errechnen Sie weitere Punkte.

Verläufe von Querkraft und Biegemoment



## 1.2.3. Übungsaufgabe, Sprungbrett

zum selber rechnen

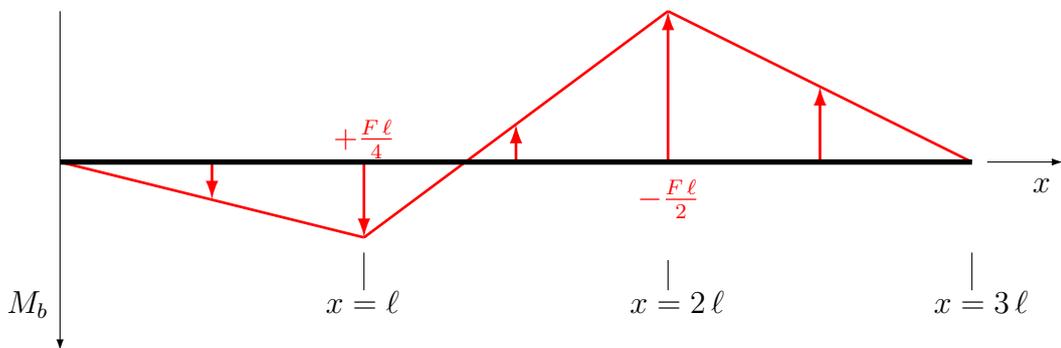
Gegeben:  $F$ ,  $\ell$ ,  $\alpha$ , gesucht: Beanspruchungsgrößen.

Ergebnisse:

Die Normalkräfte in allen Bereichen sind konstant mit den Werten  $N = -F \cos \alpha$ 

Für die Querkräfte gilt:

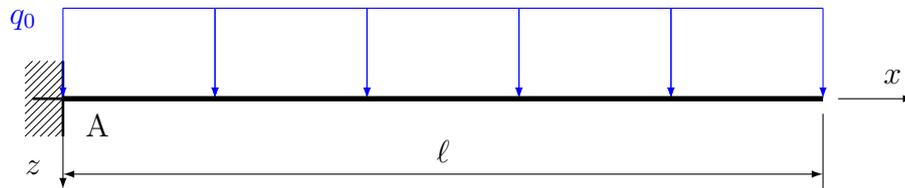
$$Q_I = \frac{F}{2} (1 - \sin \alpha), \quad Q_{II} = -\frac{F}{2} (1 + \sin \alpha), \quad Q_{III} = F \sin \alpha.$$

Bei den Biegemomenten ergibt sich der folgende Verlauf, wenn Sie annehmen  $\alpha = 30^\circ$ :

## 1.2.4. Übungsaufgabe, Streckenlast 3

zum selber rechnen

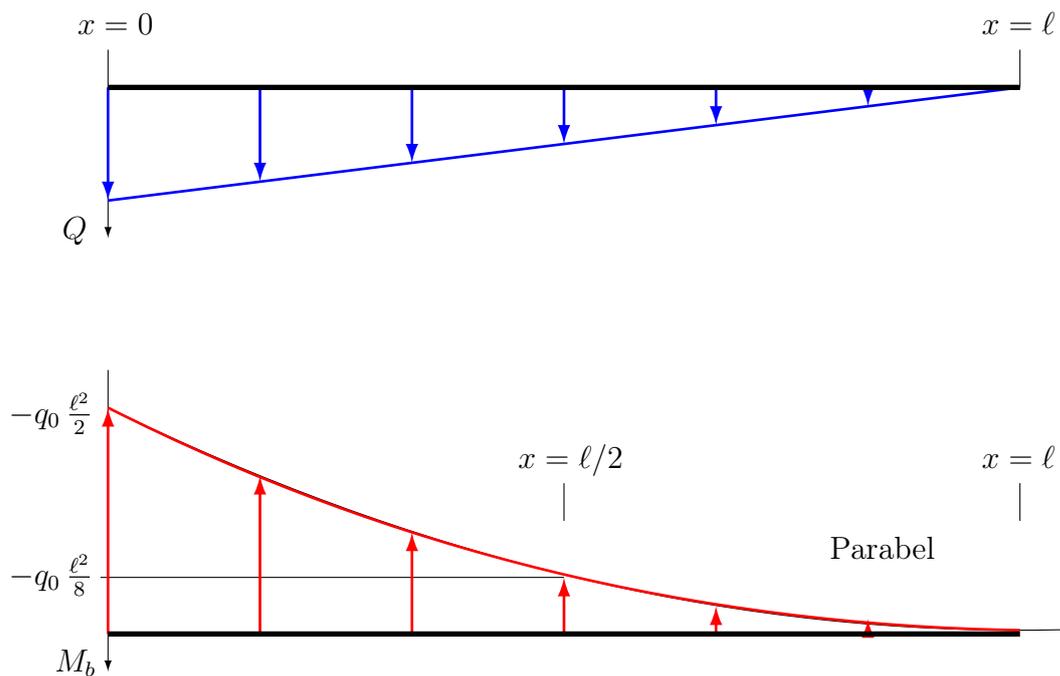
Bestimmen Sie die Beanspruchungsgrößen und stellen Sie diese graphisch dar.

Gegeben:  $q_0$ ,  $l$ 

Lösungen:

$$N = 0, \quad Q = q_0(l - x), \quad M_b = -\frac{q_0}{2}(l - x)^2.$$

Verläufe von Querkraft und Biegemoment



■

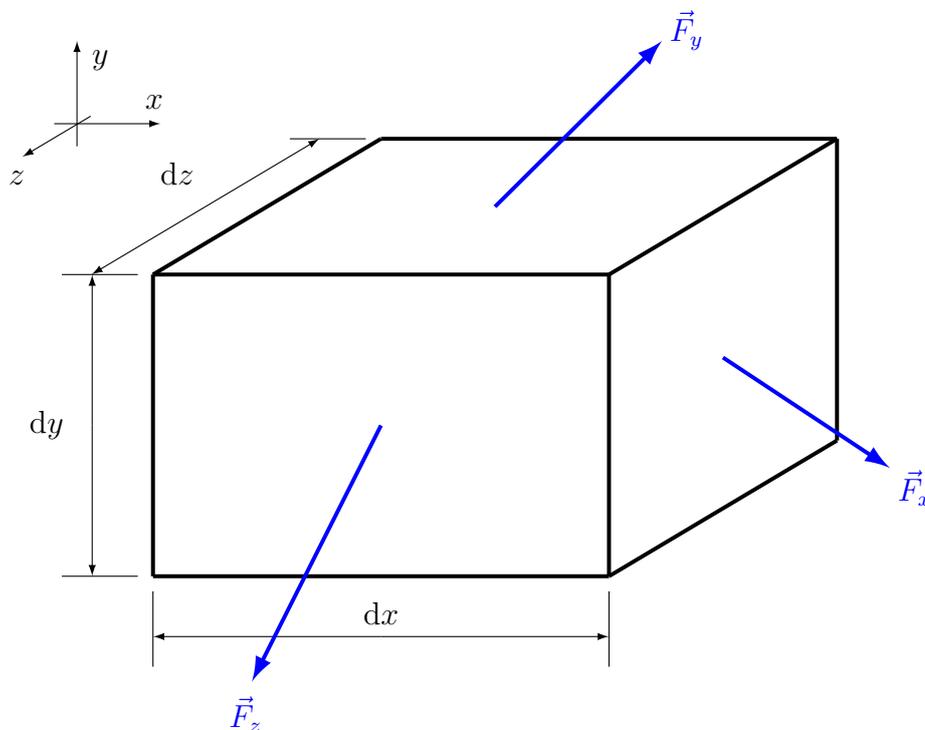
## 2. Spannungen und Verformungen

### 2.1. Spannungen

Wir wenden uns jetzt einem gänzlich neuen Thema zu. Wir wollen kennenlernen, wozu die Beanspruchungsgrößen eigentlich gut sind.

Zielstellung: Lokale innere Beanspruchungen, d.h. der innere Spannungszustand in jedem Punkt eines Körpers ist zu untersuchen.

Methode: Zerschneiden des Körpers in infinitesimale Volumenelemente und Freilegen von Schnittkräften auf den Schnittflächen. Stellen Sie sich vor, wir zersägen unseren Biegebalken in lauter kleine Quader, die nur wenige Millimeter Kantenlänge haben.



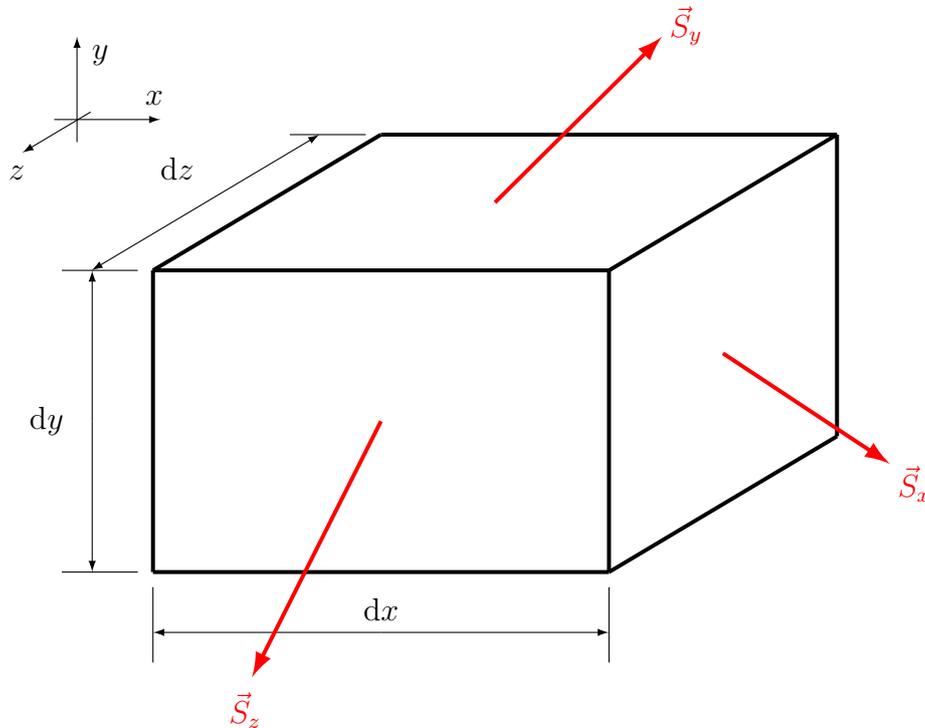
Die freigelegten Schnittkräfte sind in unerwünschter Weise vom jeweiligen Flächeninhalt abhängig: große Fläche, große Kraft, kleine Fläche, kleine Kraft.

Daher: Definition von Spannungsvektoren und Komponenten von Spannungsvektoren.

$\vec{S}$  : Spannungsvektor,  $\sigma, \tau$  : Spannungskomponenten (sigma, tau)

Wir werden später feststellen, dass die Komponenten des Spannungsvektors  $\vec{S}$  unterschiedliche Buchstaben bekommen, je nach dem ob die Komponenten senkrecht auf der Fläche stehen ( $\sigma$ ) oder in der Fläche liegen ( $\tau$ ).

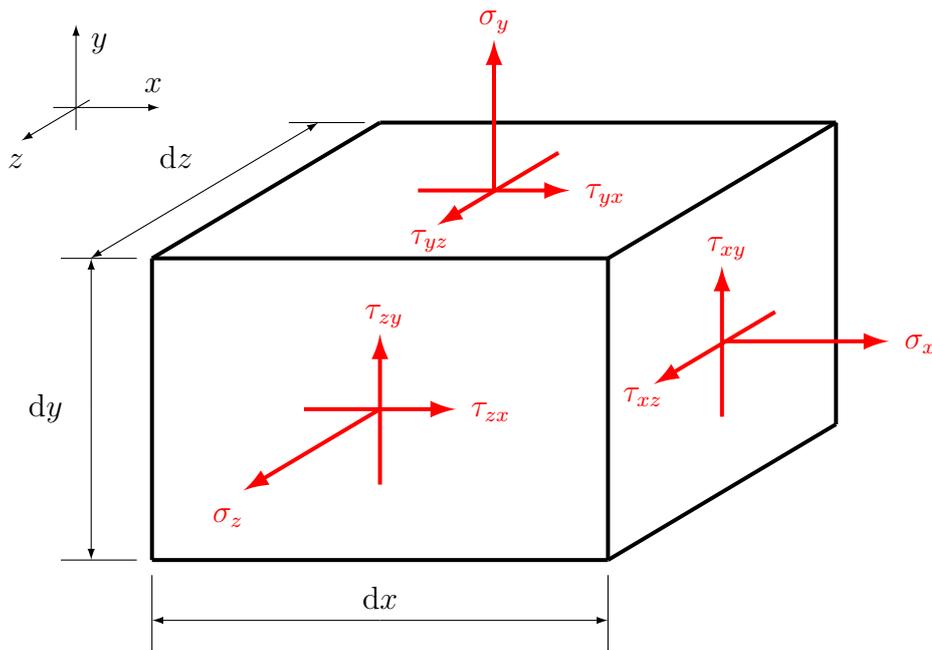
$$\dim(\vec{S}, \sigma, \tau) : \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}; \quad \text{Einheit: } \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}, \quad \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \text{MPa}$$



Hinweise: 1. Unser Koordinatensystem hat sich geändert.

2. Die Bezeichnungen  $\vec{S}_x$ ,  $\vec{S}_y$ ,  $\vec{S}_z$  können leicht missverstanden werden. Es sind keineswegs Komponenten eines Vektors sondern vollständige Spannungsvektoren, erkennbar daran, dass ein Pfeil über  $S$  angebracht ist. Die Indizes haben eine andere Bedeutung. Der Spannungsvektor  $\vec{S}_x$  hat den Index  $x$ , weil es der Vektor ist, der auf einer bestimmten Fläche steht. Es ist die Fläche aus der die  $x$ -Achse herauskommt. Das heißt nicht, dass der Vektor exakt in  $x$ -Richtung zeigt. Der Skizze können wir gut entnehmen, dass das nicht der Fall ist.

Die Spannungsvektoren  $\vec{S}_x$ ,  $\vec{S}_y$ ,  $\vec{S}_z$  werden in Richtung der Koordinatenachsen zerlegt.



Es gilt

$$(II.1) \quad \vec{S}_x = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}; \quad \vec{S}_y = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}; \quad \vec{S}_z = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Bezeichnungen

$\sigma$ : Normalspannungen (Index = Normalenrichtung der Schnittfläche)

$\tau$ : Schubspannungen (erster Index = Normalenrichtung der Schnittfläche, zweiter Index = Spannungsrichtung)

Für Spannungskomponenten gibt es strenge Vorzeichenregeln, wegen derer wir schon im Vorfeld unsere Beanspruchungsgrößen  $N$ ,  $Q$ ,  $M_b$  nach der Regel mit dem pos./neg. Schnittufer anbringen mussten.

**Vorzeichenregel** Achtung, Abweichung vom bisherigen Umgang mit Kräften.

- Normalspannungen  $\sigma$  sind positiv, wenn von der Fläche weg nach außen zeigend (Zugspannung). Druckspannungen sind negativ. Künftig werden Normalspannungen immer ziehend eingezeichnet.
- Schubspannungen  $\tau$  sind positiv, wenn in positiver Achsenrichtung wirkend **und** wenn die zugehörige Flächennormale in positive Richtung zeigt.

Die Vorzeichenregel für Normalspannungen ist einfach und wichtig, die für Schubspannungen ist kompliziert aber nicht ganz so wichtig. Betrachten Sie trotzdem das Volumenelement auf Seite 131. Drei Oberflächen des Volumenelements sind sichtbar. Die Normalenvektoren der sichtbaren Oberflächen (Länge eins, Richtung senkrecht zur Fläche nach außen) zeigen alle in positive Koordinatenrichtung. Alle eingezeichneten Schubspannungen  $\tau$  zeigen in positive Koordinatenrichtung. Nach obiger Vorzeichenregel sind es positive Schubspannungen.

Jetzt wird es verwirrend: Auf der Rückseite unseres Volumenelements zeigen die Normalenvektoren in negative Koordinatenrichtung. Deshalb zeigt eine positive Schubspannung auf den nicht sichtbaren Oberflächen in negative Koordinatenrichtung. Alles klar?

### Weiterführende Hinweise

- Die systematische Zusammenfassung aller neun Spannungen wird Spannungsmatrix oder Spannungstensor genannt.

$$(II.2) \quad \underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Momentan ist diese Spannungsmatrix nur ein „Formular“, in das unsere insgesamt neun Spannungskomponenten an vorgeschriebenen Positionen eingetragen werden sollen. Der Umkehrschluss gilt natürlich auch. Wenn wir eine Spannungsmatrix mit Zahlenwerten sehen, können wir die Zahlenwerte den Formelzeichen zuordnen. Spannungsmatrix und Volumenelement gehören auf das erlaubte Hilfsmittel der Klausur!

- Normalspannungen  $\sigma$ , deren zugehörige Schubspannungen  $\tau$  null sind, werden Haupt(normal)spannungen genannt.
- Die Betrachtung des Momentengleichgewichts am Volumenelement ergibt die Symmetrie des Spannungstensors.

$$(II.3) \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \end{aligned}$$

Fazit: Von den ursprünglich neun verschiedenen Spannungskomponenten in der Spannungsmatrix  $\underline{\underline{S}}$  bleiben nur sechs unabhängige Größen über. Schubspannungen, die sich nur in der Reihenfolge des Index unterscheiden, sind immer gleich groß.  $\underline{\underline{S}}$  ist immer symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen, das ist die „ $\sigma$ -Spur“.

- Treten nur Spannungen in einer Ebene auf, so handelt es sich um ebenen Spannungszustand. Beispiel für die  $x$ - $y$ -Ebene:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

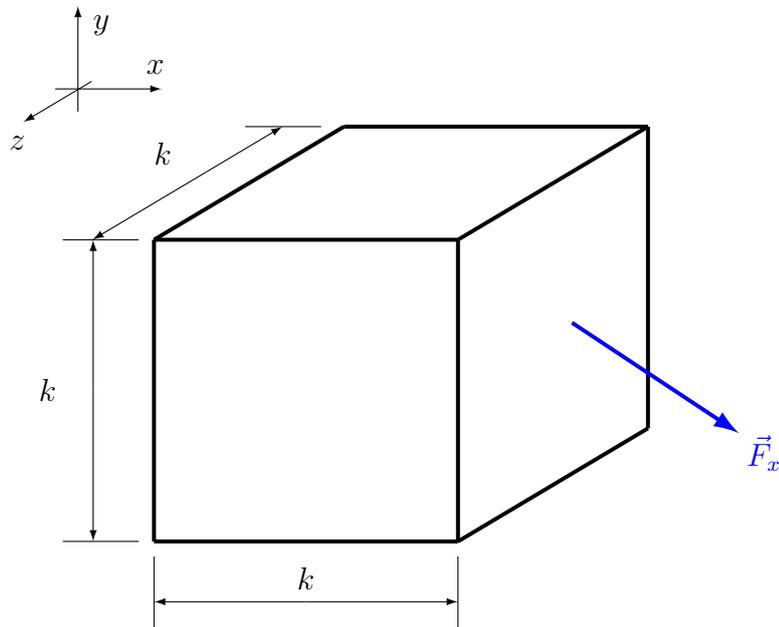
- Tritt nur eine Normalspannung auf, so handelt es sich um einen eindimensionalen Spannungszustand. Beispiel für  $\sigma_x$ :

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

### 2.1.1. Übung: Kraft an Volumenelement

Gegeben: Ein würfelförmiges Volumenelement mit  $k = 2 \text{ mm}$



sowie

$$\vec{F}_x = \begin{pmatrix} 200 \\ 240 \\ 160 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Berechnen Sie die Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ .

### Lösung

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad A = k^2$$

ebenso vektoriell

$$\vec{S} = \frac{\vec{F}}{A}, \quad \vec{S}_x = \frac{\vec{F}_x}{A}$$

$$\vec{S}_x = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_x = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

daher

$$\sigma_x = \frac{F_x}{k^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{F_y}{k^2}, \quad \tau_{xz} = \frac{F_z}{k^2}.$$

$$\sigma_x = 50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_{xy} = 60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_{xz} = 40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

■

## 2.2. Verformungen

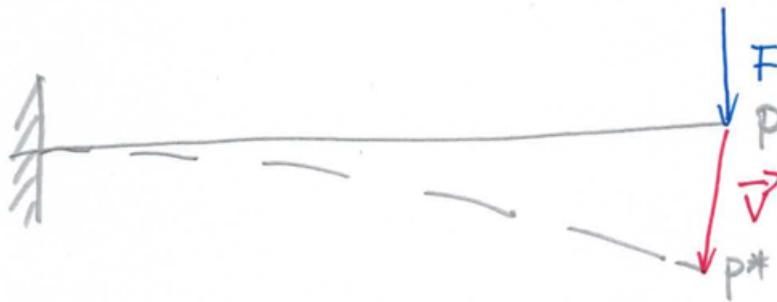
Bisher haben wir Spannungen betrachtet. Diese bleiben nicht folgenlos.

Jedes Vorhandensein von Spannungen führt zu Verformungen. Diese werden durch drei verschiedene Phänomene beschrieben.

Zunächst wird der Eindruck entstehen, die drei Phänomene seien völlig unabhängig voneinander. Zum Schluss stellt sich heraus, dass alle drei voneinander abhängig sind.

### 1. Verschiebung

Ein Punkt  $P$  eines Körpers wird durch Beanspruchung verschoben  $P \rightarrow P^*$ .

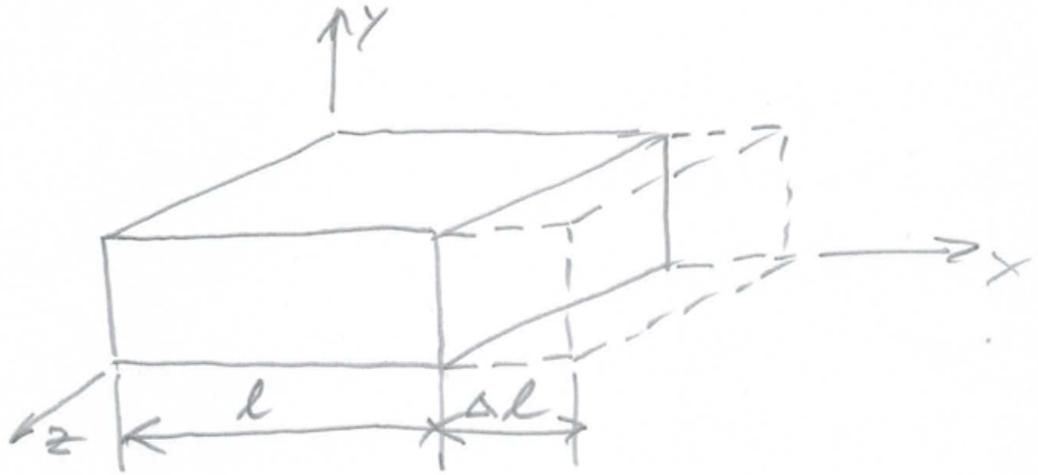


$$(II.4) \quad \text{Verschiebungsvektor} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Die Bezeichnungen sind unglücklich gewählt. Der Buchstabe  $v$  taucht zweimal auf. Einmal als der gesamte Vektor  $\vec{v}$  und einmal als  $y$ -Komponente  $v$ . Das ist unschön. Da wir künftig nur mit der Verschiebung in  $z$ -Richtung ( $z$ -Komponente  $w$ ) zu tun haben werden, ist der Schönheitsfehler nicht wirklich schlimm. Warum die  $z$ -Richtung? Bei unseren Biegebalken liegt das Koordinatensystem so, dass die  $z$ -Achse nach unten zeigt, wohin sich Teile des Balkens verschieben werden, wenn wir ihn biegen.

## 2. Längenänderung (= Dehnung)

Beispiel einer isolierten Längenänderung in  $x$ -Richtung:

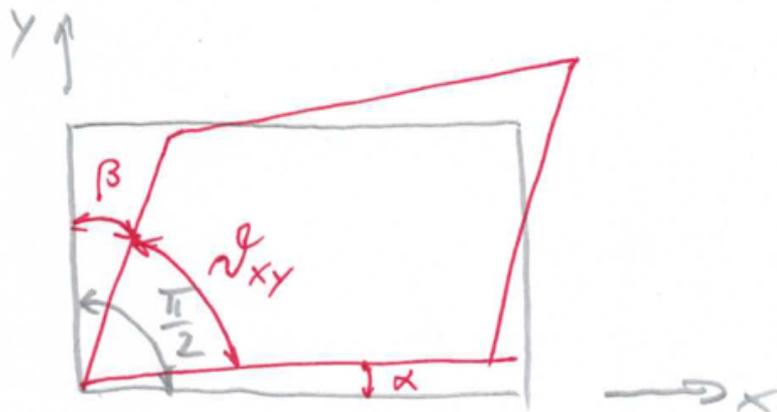


$$(II.5) \quad \text{Dehnung} = \frac{\text{Längenänderung}}{\text{Ausgangslänge}}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\text{hier } \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon_y, \varepsilon_z \text{ analog}$$

## 3. Winkeländerung (= Scherung)

Eine ursprünglich rechteckige Oberfläche eines Volumenelements wird durch Beanspruchung rautenförmig.



$$(II.6) \quad \frac{\pi}{2} - \vartheta_{xy} = \gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

mit

$\frac{\pi}{2}$ : Kantenwinkel vor der Verformung

$\vartheta_{xy}$ : Kantenwinkel nach der Verformung

$\gamma_{xy}$ : Scherung

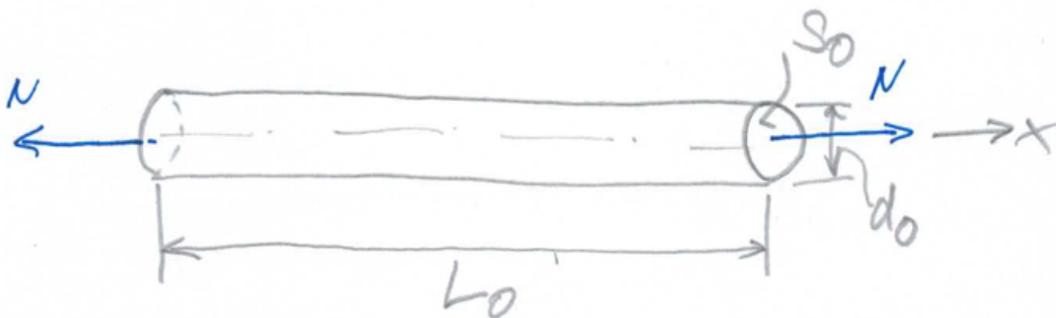
Die Scherung  $\gamma_{xy}$  (sprich gamma xy) ist zwar in der Skizze nicht direkt zu erkennen. Im Gegensatz zum gut erkennbaren Winkel  $\vartheta_{xy}$  hat die Scherung den großen Vorteil, dass sie Null ist, wenn keine Verformung vorhanden ist.  $\vartheta_{xy}$  wäre in diesem Fall  $\pi/2$ .

### 2.3. Zusammenhang zwischen Spannung und Verformung

Voraussetzung: Isotropie, d.h. alle Körperpunkte haben gleiche Materialeigenschaften. Es gibt keine Vorzugsrichtungen.

Schweizerkäse ist ein Beispiel für einen anisotropen Werkstoff. Manche Körperpunkte liegen im Käse, manche liegen in einem Loch. Ähnliches gilt für Gusswerkstoffe mit Lunkern. Holz ist ein anderes Beispiel für einen anisotropen Werkstoff. Durch die Faserstruktur hat Holz eine Vorzugsrichtung. Kundige Holzhacker versuchen erst gar nicht quer zur Faser zu hacken, sondern nehmen die Kettensäge. Faserverstärkte Kunststoffe wie GFK und CFK gehören auch zu dieser Kategorie.

Grundversuch: Axial gezogener (oder gedrückter) Zylinder. In einem solchen Fall nennen wir die Struktur einen Stab.



Annahme: In hinreichendem Abstand vom Kraftangriffspunkt herrscht ein gleichmäßiger, über den Querschnitt verteilter eindimensionaler Spannungszustand (SAINT-VENANT'sches Prinzip) mit

$$\sigma_x = \frac{N}{S_0}$$

Der Abstand  $d_0$ , vom Kraftangriffspunkt stabeinwärts gemessen, genügt. Übrigens,  $\sigma_x$  ist bei diesem Spezialfall eine Hauptspannung, da keinerlei Schubspannungen vorhanden sind. Wir bleiben diesmal bei der Bezeichnung  $\sigma_x$  und benennen nicht um in  $\sigma_1$  oder  $\sigma_2$  oder  $\sigma_3$ .

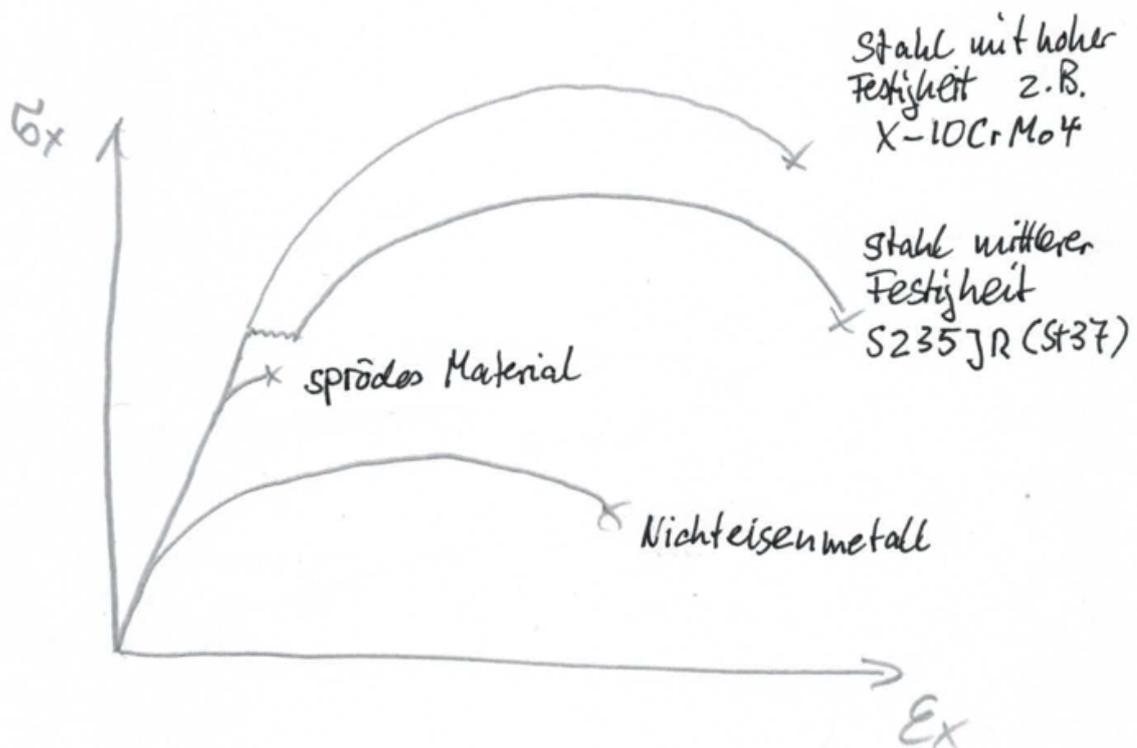
Das Ergebnis ist eine

- Stabverlängerung um  $\Delta L$ ,
- Querkontraktion um  $\Delta d$ .

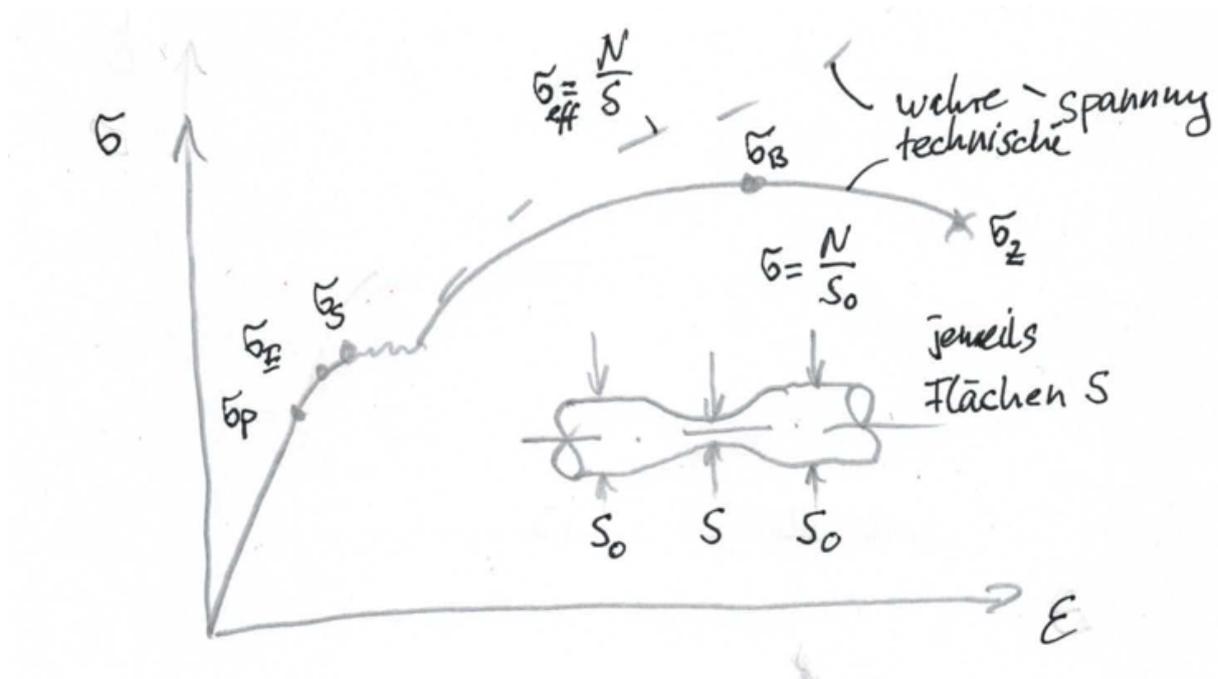
Erkenntnis: Der Zusammenhang zwischen

$$\sigma_x = \frac{N}{S_0}, \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{und} \quad \varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0}$$

ist für jedes Material verschieden. Eine echte Nullaussage, danke für das Geräusch :-)



Wir betrachten die üblichen Bezeichnungen in solchen Spannungs-Dehnungs-Diagrammen.



$\sigma_P$ : Proportionalitätsgrenze oder theoretische Elastizitätsgrenze. Bis dahin reversibles Verhalten. Linearer Kurvenverlauf mit Steigung  $E$  (Elastizitätsmodul).

$\sigma_E$  ( $R_p$ ): Dehngrenze, oder technische Elastizitätsgrenze. Bei Entlastung irreversibler Dehnungsanteil von 0,01% ( $\varepsilon = 0,0001 = 1 \cdot 10^{-4}$ ). Weitere Bezeichnungen:  $\sigma_E = \sigma_{0,01} = R_{p0,01}$ .

$\sigma_S$  ( $R_e$ ): Streck- oder Fließgrenze, sofern ausgeprägt. Ohne ausgeprägte Fließgrenze, einführen einer technischen Fließgrenze. Weitere Bezeichnungen:  $\sigma_S = \sigma_{0,02} = R_{p0,2}$

$\sigma_B$  ( $R_m$ ): Zugfestigkeit, starke örtliche Einschnürung, Maximum der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve, noch kein Bruch außer bei sprödem Material.

$\sigma_Z$ : Bruchfestigkeit, zerreißen der Probe. Hat keine praktische Bedeutung als Materialkennwert.

In der Mechanik und in der Werkstofftechnik sind die Spannungsbezeichnungen leider auseinandergedriftet. Die Mechanik hat keine Scheu vor dem griechischen Buchstaben sigma, während die Werkstoffkunde wohl ohne griechischen Zeichensatz auskommen möchte.

Nachsatz zu  $\sigma_P$ : Diesen Wert messtechnisch zu erfassen, ist nicht wirklich möglich. Nach der Entlastung darf keine bleibende Längenänderung vorliegen. Das trifft aber auch bei Belastungen mit kleineren Spannungswerten zu. Deshalb hat man willkürlich  $\sigma_E$  ( $R_p$ ) mit 0,01% bleibende Dehnung definiert, denn das kann man gut messen, es ist aber noch keine nennenswerte bleibende Dehnung. Daher hat  $\sigma_P$  auch keine werkstoffkundliche Bezeichnung mit  $R$ .

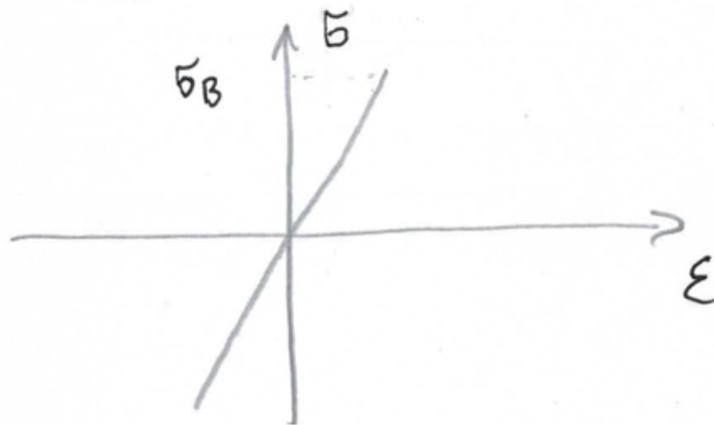
Völlig ohne technische Bedeutung ist der Verlauf der wahren Spannung. Den Verlauf messtechnisch zu erfassen, wäre extrem aufwendig. Bei Beginn der Querkontraktion müsste man die Probe in belastetem Zustand abdrehen, so dass die Einschnürung verschwunden ist und den Versuch mit kleinerer Querschnittsfläche  $S$  ein wenig fortsetzen, wieder abdrehen usw. – Macht kein Mensch.

Das alles ist uns viel zu kompliziert. Wir brauchen eine

### Vereinfachte Darstellung

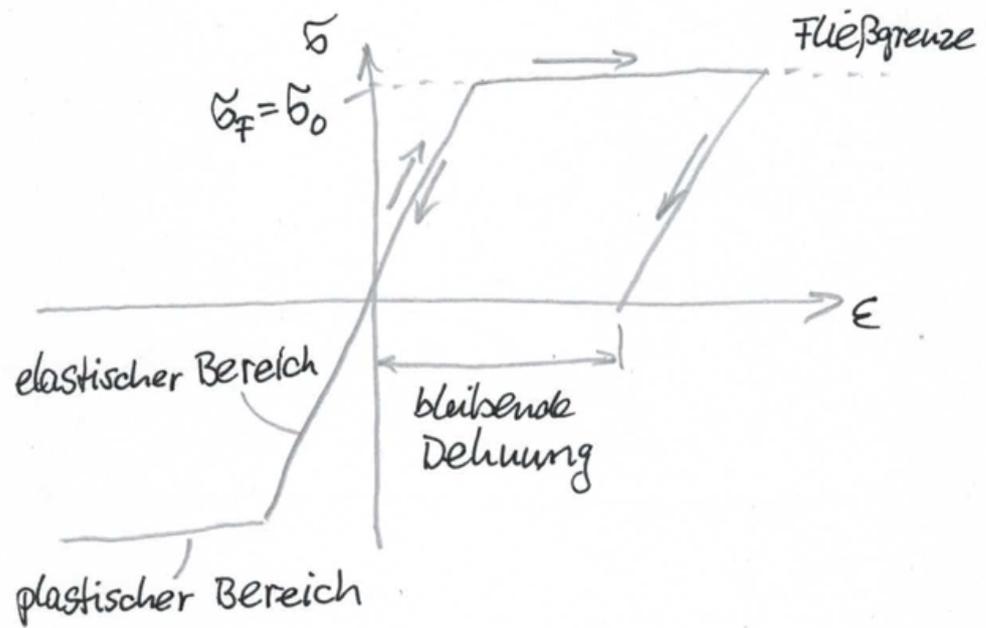
In erster Näherung gibt es in der technischen Mechanik nur zwei Werkstoffe

1. Sprödes Material



Es gibt eine lineare Abhängigkeit zwischen  $\sigma$  und  $\epsilon$ . Mit Erreichen der Zugfestigkeit  $\sigma_B$  zerreißt das Material. Glas kommt dieser Idealisierung ziemlich nahe.

## 2. Elastisch, ideal plastisches Material



Sofern die Fließgrenze  $\sigma_F$  nicht überschritten wird, sind die Verformungen reversibel und finden entlang der Geraden im elastischen Bereich statt. Wird die Fließgrenze überschritten gibt es eine plastische Verformung. Nach der Entlastung verbleibt in einem solchen Fall eine bleibende Dehnung.



## 2.4. Elastischer Bereich, HOOKEsches Gesetz

Wir haben uns ein stark vereinfachtes Materialverhalten beschafft. Nun betrachten wir den elastischen Bereich, der so bei nahezu jedem Werkstoff zu finden ist, zumindest wenn wir es mit der Belastung nicht übertreiben.

Es gilt:

$$(II.7) \quad \sigma_i = E \varepsilon_i \quad \text{mit } i = 1, 2, 3.$$

Dieses HOOKE<sup>9</sup>sche Gesetz gilt nur für den Fall, dass eine einzige Hauptspannung auftritt (= einachsiger Zug oder Druck).

$E$ : YOUNG<sup>10</sup>scher Elastizitätsmodul. Er ist experimentell für jedes Material zu ermitteln. Für Stahl gilt näherungsweise

$$E_{\text{St}} = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

Ein Stab unter Zugspannung wird gedehnt mit  $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$ , dabei nimmt sein Durchmesser ab.

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$$

Der Zusammenhang zwischen Längs- und Querdehnung  $\varepsilon_q$  ist materialabhängig

$$(II.8) \quad \varepsilon_q = -\nu \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

$\nu$ : POISSON<sup>11</sup>sche Querkontraktionszahl.  $\nu_{\text{St}} = 0,25 \dots 0,3$ . Es gilt  $\nu \leq 0,5$ .

Bei  $\nu$  handelt es sich um den griechischen Buchstaben  $\nu$ . Obiges ausgesprochen lautet: Nü-Stahl gleich 0,3.

Anmerkung: Die häufige Annahme einer Volumenkonstanz des gedehnten Körpers tritt in der Regel nicht ein. Ausnahme Gummi mit  $\nu_{\text{Gummi}} = 0,5$ . Bei  $\nu = 0,5$  bleibt das Volumen konstant.

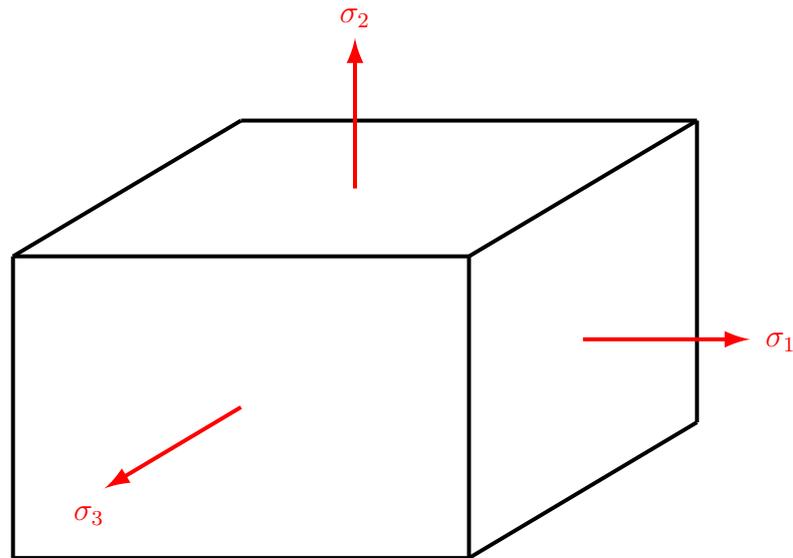
Beim räumlichen Hauptspannungszustand,

---

<sup>9</sup>Robert Hooke, 1635 bis 1703

<sup>10</sup>Thomas Young, 1773 bis 1829

<sup>11</sup>Siméon Denis Poisson 1781 bis 1840



d.h., es treten drei Normalspannungen auf, jedoch keine Schubspannungen, gilt:

$$(II.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang ist von eventuell auftretenden Schubspannungen unabhängig. In einem beliebigen Spannungszustand gilt:

$$(II.10) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned}$$

Für den Zusammenhang zwischen Schubspannungen und Scherungen im elastischen Bereich gilt

$$(II.11) \quad \gamma = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau.$$

Mit der Abkürzung

$$\frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G}$$

gilt

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

$G$ : Schubmodul. Bei Stahl mit  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa und  $\nu = 0,3$  gilt  $G \approx 8,1 \cdot 10^4$  MPa.

### Weiterführende Hinweise

Die hier getrennt behandelten Verformungsgrößen

- Verschiebungen  $u, v, w$  bzw.  $\vec{v}$  [m, mm]
- Dehnungen  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  [1]
- Scherungen  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  [1] bzw. [rad]

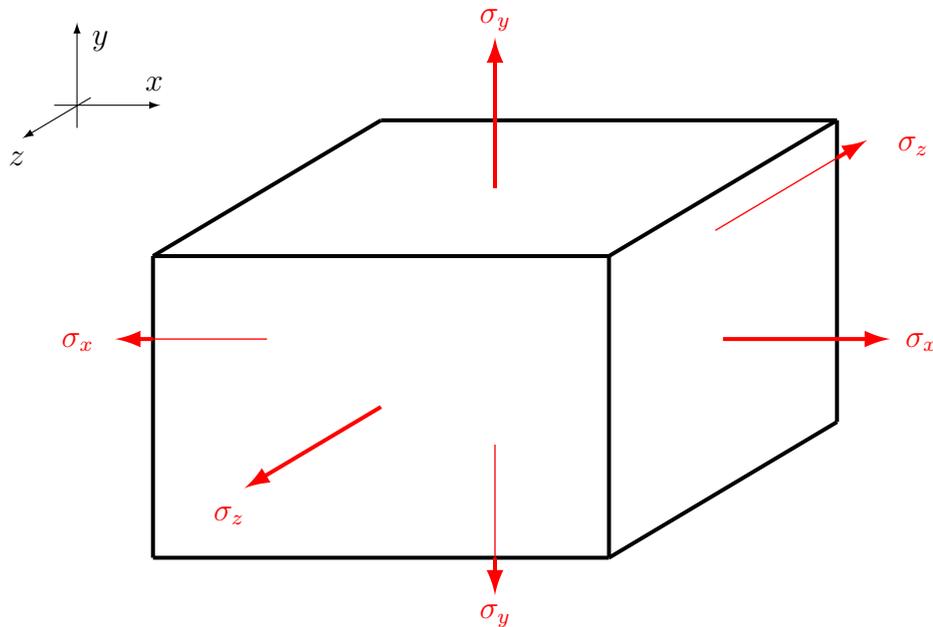
sind voneinander abhängig. Beispiele ohne Beweis:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \dots$$



### 2.4.1. Übungsaufgabe, Längenänderung eines Quaders

Auf einen Stahlwürfel wirken folgende Spannungen (tatsächlich ein Würfel, auch wenn die Skizze anders aussieht):



$$\begin{aligned}
 |\sigma_x| &= 200 \text{ MPa} && \text{als Zugspannung} \\
 |\sigma_y| &= 150 \text{ MPa} && \text{als Druckspannung} \\
 |\sigma_z| &= 100 \text{ MPa} && \text{als Druckspannung} \\
 E &= 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, && \nu = 0,3 \\
 \ell_x &= \ell_y = \ell_z = 40 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Gesucht sind die Kantenlängen in belastetem Zustand  $\ell_x^*$ ,  $\ell_y^*$ ,  $\ell_z^*$ .  
Es gibt keine Schubspannungen.

Wir haben drei Normalspannungen gegeben mit verschleiertem Vorzeichen. Es gibt die feste Vorgabe: Druckspannungen sind negativ, Zugspannungen sind positiv. Ferner gibt es den Hinweis, dass es keine Schubspannungen gibt. Also sind die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  Hauptspannungen. Das ist verwirrend. Daher noch einmal folgender Hinweis:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  zeigen immer in  $x, y, z$ -Richtung  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sind immer Hauptspannungen.

Wenn aber eine Hauptspannung in  $x$ -Richtung zeigt, dann kann sie wahlweise  $\sigma_x$  oder  $\sigma_{123}$  heißen. Welche Ziffer im Index steht, ist willkürlich.

Vorzeichenüberlegung

$$\sigma_x = +200 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -150 \text{ MPa}, \quad \sigma_z = -100 \text{ MPa}.$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\Delta l_x}{l_x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{\Delta l_y}{l_y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{\Delta l_z}{l_z}$$

Neue Kantenlänge

$$l_x^* = l_x + \Delta l_x = l_x + l_x \varepsilon_x = l_x (1 + \varepsilon_x)$$

$$l_x^* = l_x \left( 1 + \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \right)$$

$$l_x^* = 40,052 \text{ mm}$$

$$l_y^* = l_y \left( 1 + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \right)$$

$$l_y^* = 39,966 \text{ mm}$$

$$l_z^* = l_z \left( 1 + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \right)$$

$$l_z^* = 39,978 \text{ mm}$$

■

### 3. Vergleichsspannungshypothesen

**Problemstellung** Die Beanspruchung eines Bauteils erfolgt in der Regel mit räumlichem Spannungszustand. Materialkenngrößen werden dagegen für den einachsigen Zug ermittelt ( $\sigma_P$ ,  $\sigma_B$  für St, ...)

Da im Spannungstensor neun (sechs unabhängige)<sup>12</sup> Zahlenwerte angesammelt sind, ist die Antwort alles andere als trivial.

**Lösung** Aus den tatsächlich auftretenden (max 9) Spannungen wird eine Vergleichsspannung berechnet, die direkt mit Materialkenngrößen verglichen werden kann.

Dazu gibt es zwei Vergleichsspannungshypothesen

1. Hypothese von TRESCA<sup>13</sup>, auch genannt Schubspannungshypothese.

Die Vergleichsspannung  $\sigma_v$  berechnet sich aus der maximalen Hauptspannungsdifferenz.

$$(II.12) \quad \sigma_v = \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_3|; |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$

2. Hypothese von HUBER und VON MISES<sup>14</sup>, genannt Gestaltänderungsenergiehypothese.

Der Grundgedanke der Herren HUBER und VON MISES war, dass die Energie, die aufgewandt werden muss, um einen Körper zu verzerren, das Fließkriterium ist. Auf eine Herleitung wird verzichtet, es wird lediglich das Ergebnis verkündet.

$$(II.13) \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]}$$

Taktischer Hinweis. Bei der Berechnung nach HvM passiert folgender klassische Fehler: Der Faktor  $\frac{1}{2}$  wird nur bei  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2$  angewandt und bei den anderen Termen vergessen. Um das zu verhindern speichern Sie die drei Hauptspannungen incl. Vorzeichen in die Speicher A, B, C Ihres Taschenrechners und tippen Sie die Gleichung (II.13) stumpf ab.

Bei beiden Hypothesen muss gelten

$$\sigma_v < \sigma_{zul} \quad \text{mit} \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{s_F}$$

bei Auslegung im elastischen Bereich, oder

<sup>12</sup>Die Schubspannungen tauchen immer paarweise mit gleichem Zahlenwert auf. Beispiel  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

<sup>13</sup>Henri Édouard Tresca, 1814 bis 1884

<sup>14</sup>Maksymilian Tytus Huber, 1872 bis 1950,  
Richard Edler von Mises, 1883 bis 19535.

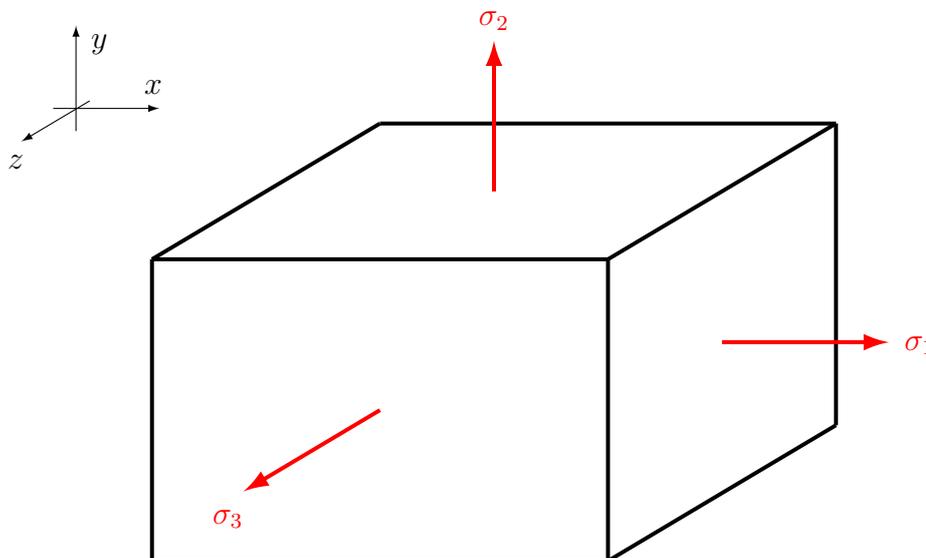
$$\sigma_v < \sigma_{\text{zul}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_B}{s_B}$$

bei Auslegung im plastischen Bereich. Dabei sind  $s_F$ ,  $s_B$  Sicherheitsfaktoren gegen Fließen bzw. gegen Bruch.  $\sigma_F$  ist die Fließgrenze und  $\sigma_B$  die Zugfestigkeit.

Sicherheitsfaktoren sind Unsicherheitsfaktoren!

Welchen Sicherheitsfaktor man wählt, ist sehr verschieden. Im Seilbahnbau wird wegen der noch nicht restlos bekannten Vorgänge in Drahtseilen mit bis zu  $s_F = 8$  gerechnet. Grund sind die Wechselbiegungen über einen langen Zeitraum in rauer, korrosiver Umgebung. Zudem werden Drahtseile zur Personenbeförderung nach bestimmten Nutzungsdauern verworfen. Am anderen Ende der Skala erzählt man sich die Geschichte, dass bei der Entwicklung der Mondrakete Saturn V mit  $s_B = 0,9$  gerechnet wurde. Wird schon gut gehen, ist ja ohnehin eine Wegwerfrakete. Irgendwo dazwischen müssen Sie Ihr Schlafmittel dosieren. Ein anderes Bild lautet in diesem Zusammenhang: Die Leute von Doppelmayer<sup>15</sup> ziehen sich warm an; die NASA-Fritzen von damals standen in der Badehose da.

Weiteres Problem: In den Berechnungen tauchen nur Hauptspannungen auf. Ein Spannungszustand ist jedoch ein Sonderfall.



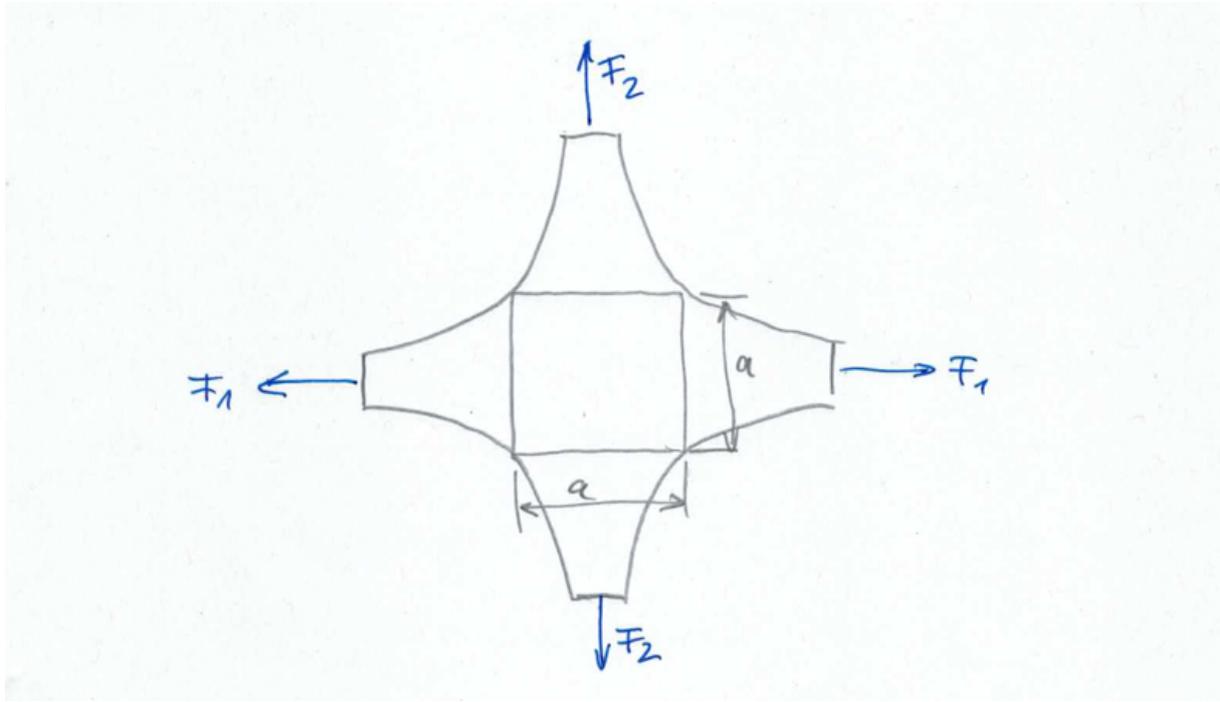
Der Normalfall ist ein beliebiger räumlicher Spannungszustand. ■

<sup>15</sup>Österreichischer Seilbahnhersteller, Weltmarktführer. Beim Skifahren (in Ischgl und überall sonst) sehen Sie das Firmenschild an jedem Stützmast.

### 3.0.1. Übungsaufgabe, Knotenblech 2, TRESCA

Wir lassen uns nicht entmutigen und beginnen mit den Sonderfällen, bei denen nur Hauptspannungen auftreten.

Ein Knotenblech wird durch äußere Kräfte beansprucht.



Im quadratischen Kernbereich kann ebener Hauptspannungszustand angenommen werden.

Gegeben:  $F_1 = 30 \text{ kN}$ ,  $a = 40 \text{ mm}$ , Blechdicke  $d = 3 \text{ mm}$ ,  $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$ .

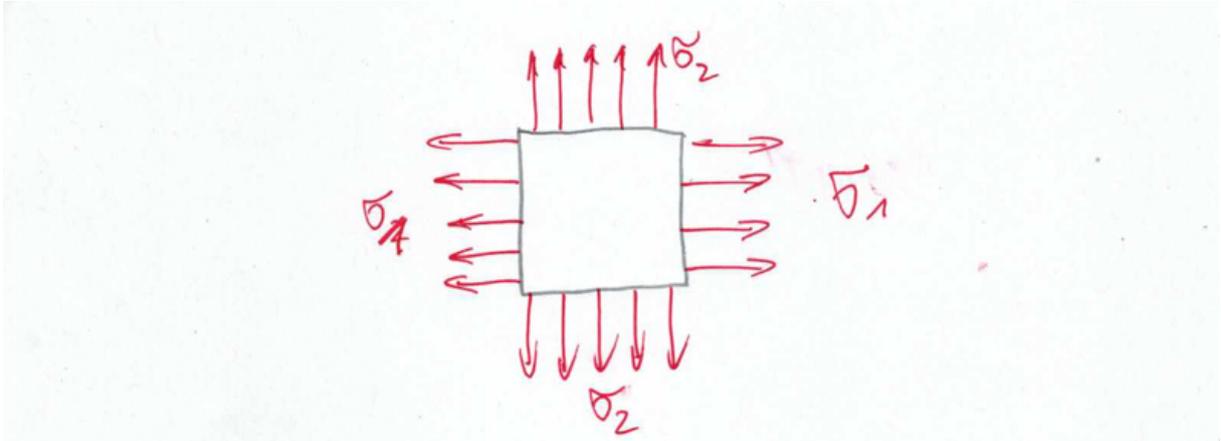
Berechnen Sie die Sicherheit gegen Fließen nach TRESCA für

a)  
 $F_2 = +10 \text{ kN}$

b)  
 $F_2 = -10 \text{ kN}$



Wir betrachten den quadratischen Kernbereich des Knotenblechs. Bei der Gelegenheit sei darauf hingewiesen, dass meine Darstellung von Spannungen nicht einheitlich ist. Im folgenden Bild symbolisiert eine Vielzahl von Pfeilen die Spannung, in anderen Fällen ein einzelner Pfeil. Auch in solchen Fällen sind Spannungen auf der gesamten Fläche vorhanden. Da im vorliegenden Fall aus Einzelkräften Spannungen berechnet werden sollen, ist der zweifelsfreie zeichnerische Hinweis „Spannung wirkt auf der gesamten Kantenfläche“ von Vorteil.



Spannungsberechnung

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{a d}, \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{a d}.$$

Die Aufgabenstellung weist uns auf einen Hauptspannungszustand hin, so dass die Bezeichnungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  korrekt sind. Zufällig passen die Indizes zu denen der Kräfte.

Wir betrachten die Aufgabenteile a) und b) parallel

a)  $\sigma_1 = 250 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = 83,3 \text{ MPa}$

b)  $\sigma_1 = 250 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_2 = -83,3 \text{ MPa}$

Vergleichsspannungshypothese nach TRESCA.

$$\sigma_v = \max \left[ |\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_3|; |\sigma_2 - \sigma_3| \right].$$

Wichtig:

$$\sigma_3 = 0$$

a)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 167 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 83,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 250 \text{ MPa}$$

$$\sigma_v = 250 \text{ MPa.}$$

b)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 333,3 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| = 83,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 250 \text{ MPa}$$

$$\sigma_v = 333,3 \text{ MPa.}$$

$$\sigma_v < \sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_F}{s_F}; \quad s_F < \frac{\sigma_F}{\sigma_v}$$

a)

$$s_F < 1,2$$

b)

$$s_F < 0,9$$

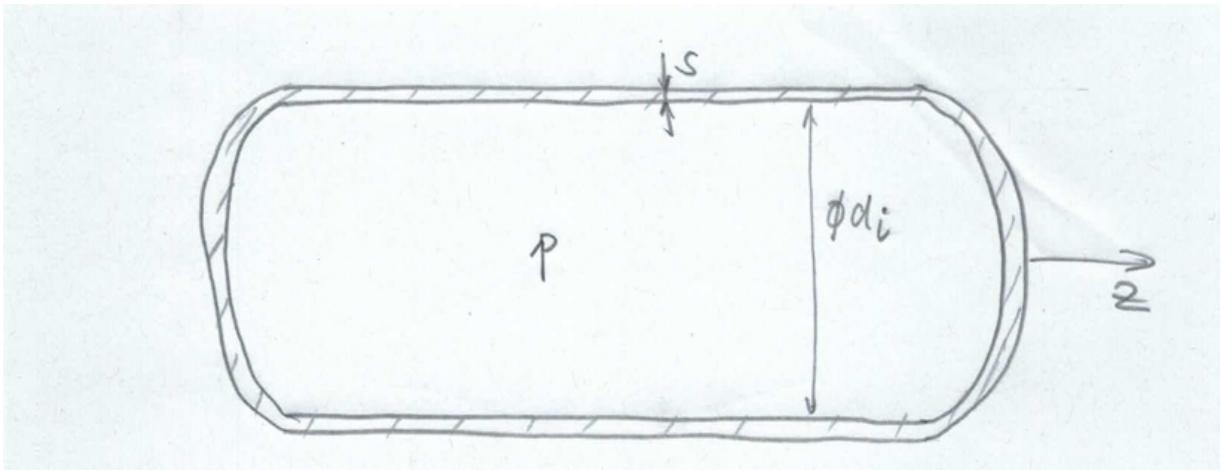
Im Fall b) beginnt das Knotenblech zu fließen. Bauteil ist unterdimensioniert.

Bemerkenswert ist bei dieser Aufgabe, dass nur eine Richtungsumkehr der Kraft  $F_2$  zu den unterschiedlichen Ergebnissen führt. Wir sehen auch, dass bei ebenem Spannungszustand die Tatsache, dass  $\sigma_3 = 0$  ist, von entscheidender Bedeutung sein kann. ■

### 3.0.2. Übungsaufgabe, Kesselformel

In dieser Übung wollen wir das Mysterium klären, warum Grill- oder Brühwürstchen immer längs aufplatzen, wenn sie zu heiß werden. Sie könnten ja auch ein Ende absprengen oder mittig in zwei Teile platzen. Tun sie aber nicht. Nach Verständnis dieser Übungsaufgabe können Sie bei Grillpartys alle Anwesenden belehren, dass die Würstchen gar keine andere Wahl haben, als längs aufzuplatzen. Das liegt nämlich an der Kesselformel, die wir herleiten werden. Leider werden Sie anschließend zu keiner Grillparty mehr eingeladen.

Ein zylindrischer Kessel steht unter dem Druck  $p$ . Wie groß ist die Sicherheit gegen plastisches Fließen nach der Gestaltänderungsenergiehypothese? Betrachtet sei nur der zylindrische Teil des Kessels.



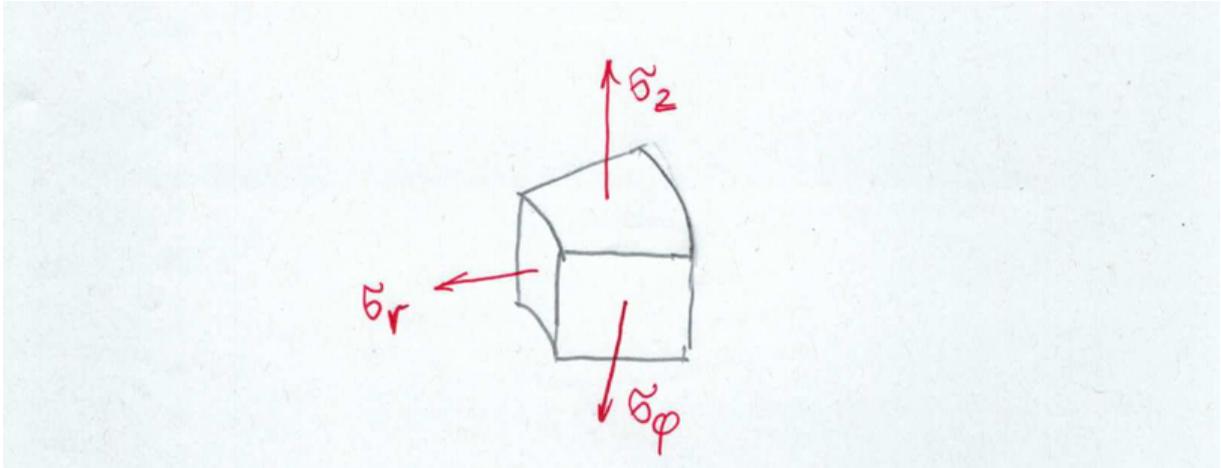
Gegeben:  $p = 100 \text{ bar}$ ,  $d_i = 300 \text{ mm}$ ,  $s = 5 \text{ mm}$ ,  $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$ .

Zur Erinnerung: Vergleichsspannung nach HUBER und VON MISES.

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]}$$

$$\sigma_v < \sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{s_F}$$

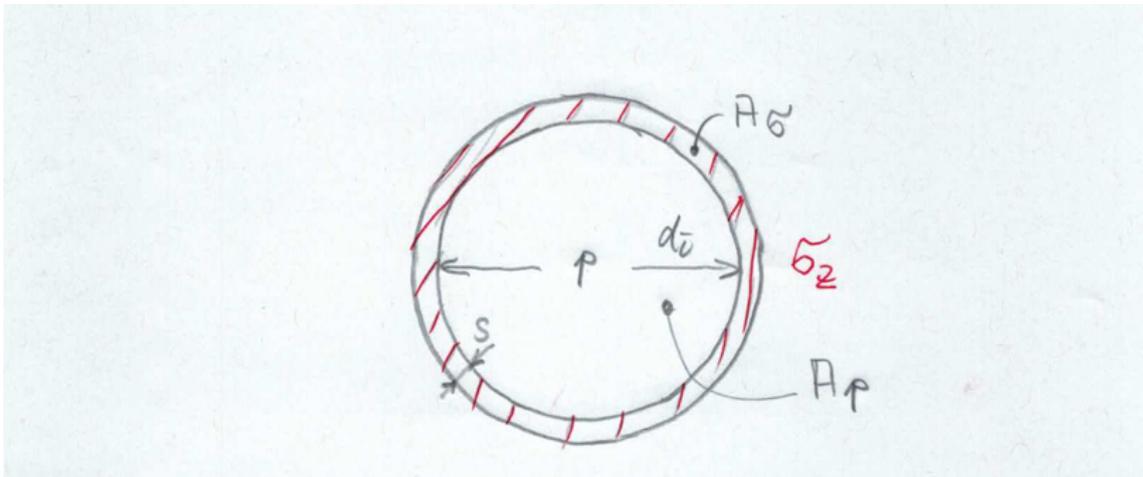
Die Suche nach Hauptspannungen ist hier in einem Zylinderkoordinatensystem vergleichsweise einfach. Wir betrachten ein Stück aus der Kesselwandung ([Bockwurstpel-le](#)).



Wir sehen eine Spannung in Umfangsrichtung  $\sigma_\varphi$ , eine Spannung in radialer Richtung  $\sigma_r$  und eine Spannung in Längsrichtung  $\sigma_z$ .

Ohne Nachweis: In dünnwandigen Behältern treten keine Schubspannungen auf, so dass die vorhandenen drei Spannungen Hauptspannungen sind. Wir könnten sie umbenennen in  $\sigma_{123}$ , tun das aber nicht.

1. Berechnen von  $\sigma_z$  durch Schneiden des Behälters.



Kräftegleichgewicht aus Druckkräften und Kräften aus  $\sigma_z$ .

$$\sigma_z A_\sigma = p A_p$$

Die Fläche  $A_\sigma$ , die Fläche auf der die Spannung  $\sigma_z$  wirkt berechnet sich zu

$$A_\sigma = [(d_i + 2s)^2 - d_i^2] \frac{\pi}{4}$$

Diese Gleichung ist genau aber unpraktisch. Einfacher ist der Ansatz, indem wir den mittleren Umfang auftrennen, abrollen und ein langgestrecktes Rechteck betrachten. Mittlerer Umfang mal Wandstärke.

$$A_\sigma = (d_i + s) \pi s$$

Bei einem dünnwandigen Behälter kann dieser Zusammenhang noch weiter vereinfacht werden zu

$$A_\sigma = d_i \pi s.$$

Nun zu der Fläche, auf der der Druck  $p$  wirkt.

$$A_p = d_i^2 \frac{\pi}{4}$$

Nun kann  $\sigma_z$  berechnet werden.

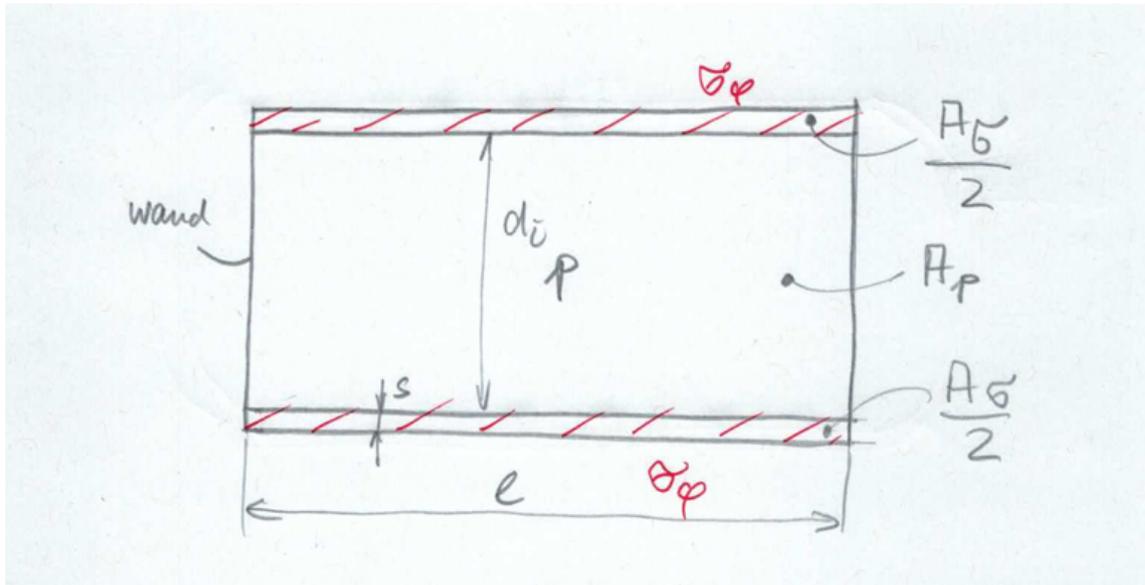
$$\sigma_z = p \frac{A_p}{A_\sigma} = p \frac{d_i^2 \pi}{4 d_i \pi s}$$

Es kann gekürzt werden.

$$\sigma_z = p \frac{d_i}{4s}$$

## 2. Berechnen von $\sigma_\varphi$

Wir schneiden erneut und erhalten neue, andere Flächen  $A_\sigma$ ,  $A_p$ . Da wie die Behälterböden nicht betrachten sollen, schließen wir den zylindrischen Teil des Behälters mit zwei dichten aber nicht tragenden virtuellen Wänden ab.



$$\sigma_{\varphi} A_{\sigma} = p A_p$$

Für die Flächenberechnung kennen wir leider die Behälterlänge nicht. Wir erfinden kurzerhand die Länge  $\ell$  und hoffen, dass sie sich herauskürzt.

$$A_{\sigma} = 2 \ell s$$

$$A_p = \ell d_i$$

Nun kann  $\sigma_{\varphi}$  berechnet werden.

$$\sigma_{\varphi} = p \frac{A_p}{A_{\sigma}} = p \frac{\ell d_i}{2 \ell s}$$

$$\sigma_{\varphi} = p \frac{d_i}{2 s}$$

Wir stellen fest, dass

$$\sigma_{\varphi} = 2 \sigma_z$$

Die Bockwurst hat also keine andere Wahl, als längs aufzureißen. Gleiches gilt für Druckbehälter und Dampfkessel aller Art. Diese Zusammenhänge werden unter dem Begriff Kesselformel zusammengefasst.

3.  $\sigma_r = 0$  Wegen des Fehlens von Schubspannungen muss die Radialspannung Null sein. Das ist nicht sehr einleuchtend, da der Innendruck doch auf die innere Oberfläche der Kesselwandung drückt. Trotzdem, in guter Näherung gilt bei dünnwandigen Behältern  $\sigma_r = 0$ .

Es gilt  $1 \text{ bar} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ .

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi &= 100 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{300 \text{ mm}}{2 \cdot 5 \text{ mm}} \\ \sigma_\varphi &= 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_\varphi}{2} = 150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Es liegt ein ebener Hauptspannungszustand vor.

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]} \\ \sigma_v &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 150^2 + 300^2 + 150^2 \right]} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_v &= 260 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

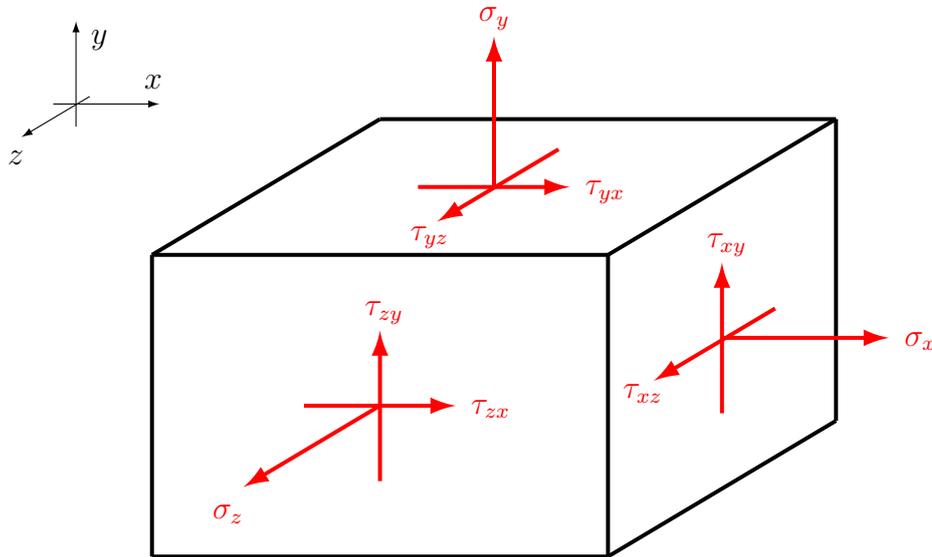
$$\begin{aligned}\sigma_v &< \frac{\sigma_F}{s_F} \\ s_F &< \frac{\sigma_F}{\sigma_v} \\ s_F &< 1,15\end{aligned}$$

Die Sicherheit gegen Fließen beträgt 1,15. Für Bockwürste mag das ausreichen, für Druckbehälter in Kernkraftwerken bei weitem nicht.

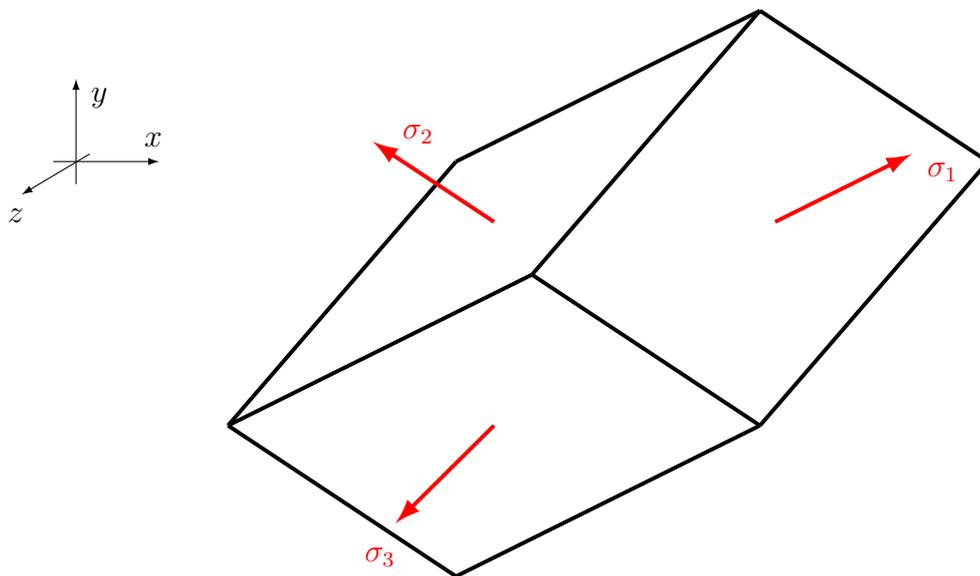
Im KKW Brunsbüttel ist im Jahr 2001 ein Rohr zum Reaktordruckbehälter bei einer H<sub>2</sub>-Explosion auf größerer Länge längs gerissen. Der Betreiber konnte die offene Rohrleitung abschiebern und fuhr die Anlage wochenlang weiter. Als die Aufsichtsbehörde nachfragte, deklarierte der Betreiber das Ereignis als „spontanes Dichtungsversagen“ und verweigerte zunächst eine Begehung. Dass im Regelbetrieb eines Siedewasserreaktors durch Radiolyse H<sub>2</sub> entsteht, war bei der Auslegung dieser Anlage noch nicht bekannt. Der Schlitten wird zum Glück jetzt abgebaut. ■

## 4. Bestimmung der Hauptspannungen

Gegeben sei ein beliebiger räumlicher Spannungszustand. Es wird ein Volumenelement im  $x, y, z$  Koordinatensystem freigeschnitten



Ein gleich großes Volumenelement an gleicher Stelle im Bauteil aber mit anderer Orientierung wird nur durch Hauptspannungen beansprucht.



$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sind die gesuchten Hauptspannungen.

## 4.1. Berechnung

Sie werden berechnet als Lösungen des Polynoms

$$(II.14) \quad \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

mit

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z \\ - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \det(\underline{\underline{S}}) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

$I_1, I_2, I_3$  werden „die drei Invarianten“ genannt, da sie von der Orientierung im Koordinatensystem unabhängig sind.

## 4.2. Zeichnerische Methode, MOHRscher Kreis

Bei ebenem Spannungszustand, erkennbar an

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

bietet sich zur Bestimmung von Hauptspannungen eine einfache graphische Methode an (MOHR<sup>16</sup>scher Spannungskreis, 1882).

### Konstruktion eines M.K. im $\sigma$ - $\tau$ -Koordinatensystem

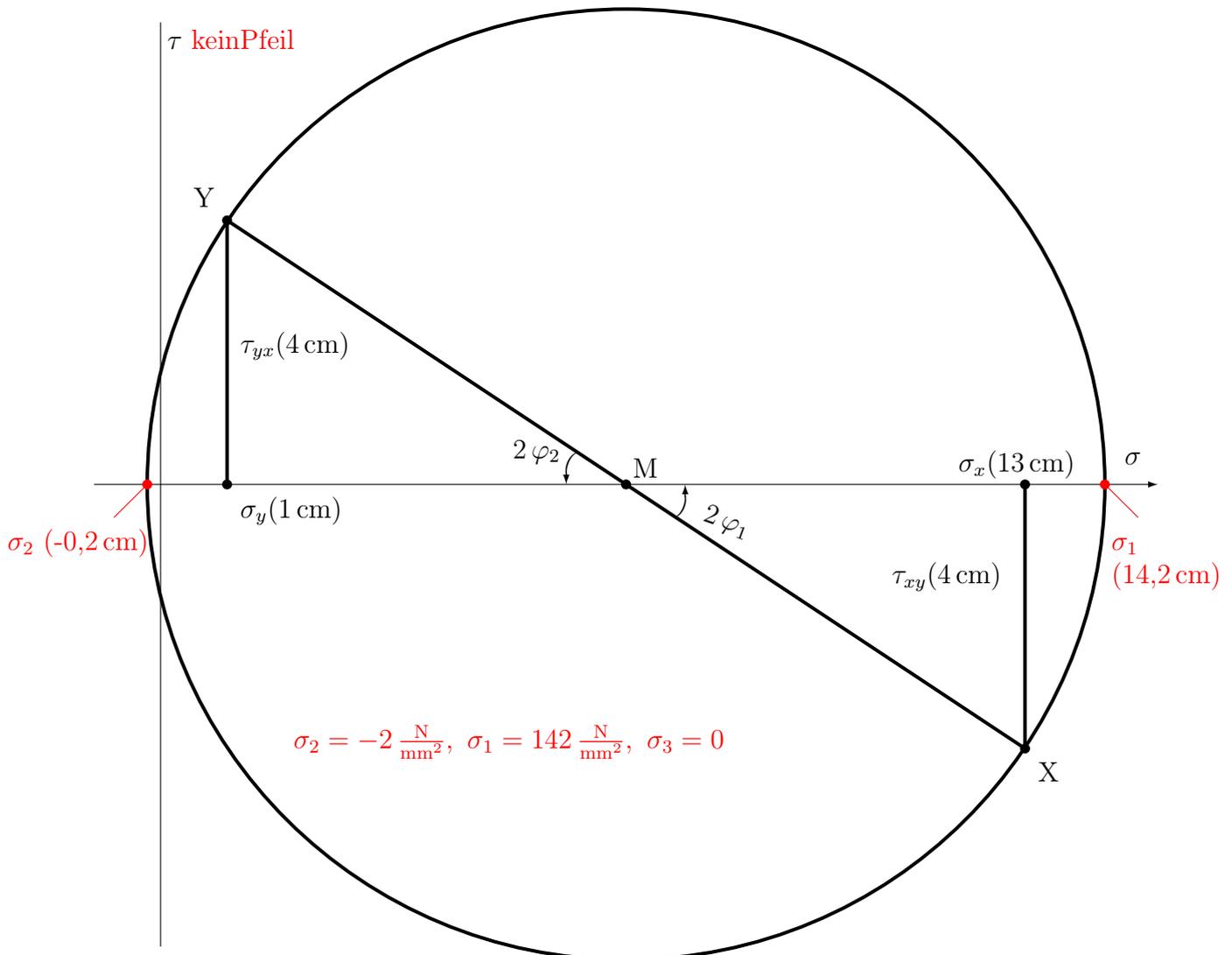
1.  $\sigma_x$  auf der  $\sigma$ -Achse antragen. Von dort ein positives  $\tau_{xy}$  nach unten.  $\rightarrow$  Punkt X.
2.  $\sigma_y$  auf der  $\sigma$ -Achse antragen. Von dort  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  nach oben.  $\rightarrow$  Punkt Y.
3. Punkte X und Y verbinden. Der Schnittpunkt von  $\overline{XY}$  mit der  $\sigma$ -Achse ist der Kreismittelpunkt M.
4.  $\overline{MX} = \overline{MY}$  ist der Radius des M.K.
5. Die Schnittpunkte des Kreises mit der  $\sigma$ -Achse sind die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Ferner gilt  $\sigma_3 = 0$ .

---

<sup>16</sup>Christian Otto Mohr 1835 bis 1918

**Beispiel**

$$\sigma_x = 130 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_y = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

**Weiterführende Hinweise**

Hauptspannungen sind die Eigenwerte der Spannungsmatrix. Die Eigenvektoren der Spannungsmatrix sind die Richtungen, in denen die Hauptspannungen zeigen.

Auch aus dem M.K. sind die Richtungen der Hauptspannungen ermittelbar. Der Winkel zwischen  $\sigma_x$  und  $\sigma_1$  ist  $\varphi_1$ .

■

### 4.2.1. Übungsaufgabe, zwei MOHRsche Kreise

Gegeben sind zwei ebene Spannungszustände

a)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 200 \text{ MPa} & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= 100 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 0 \text{ MPa}\end{aligned}$$

b)

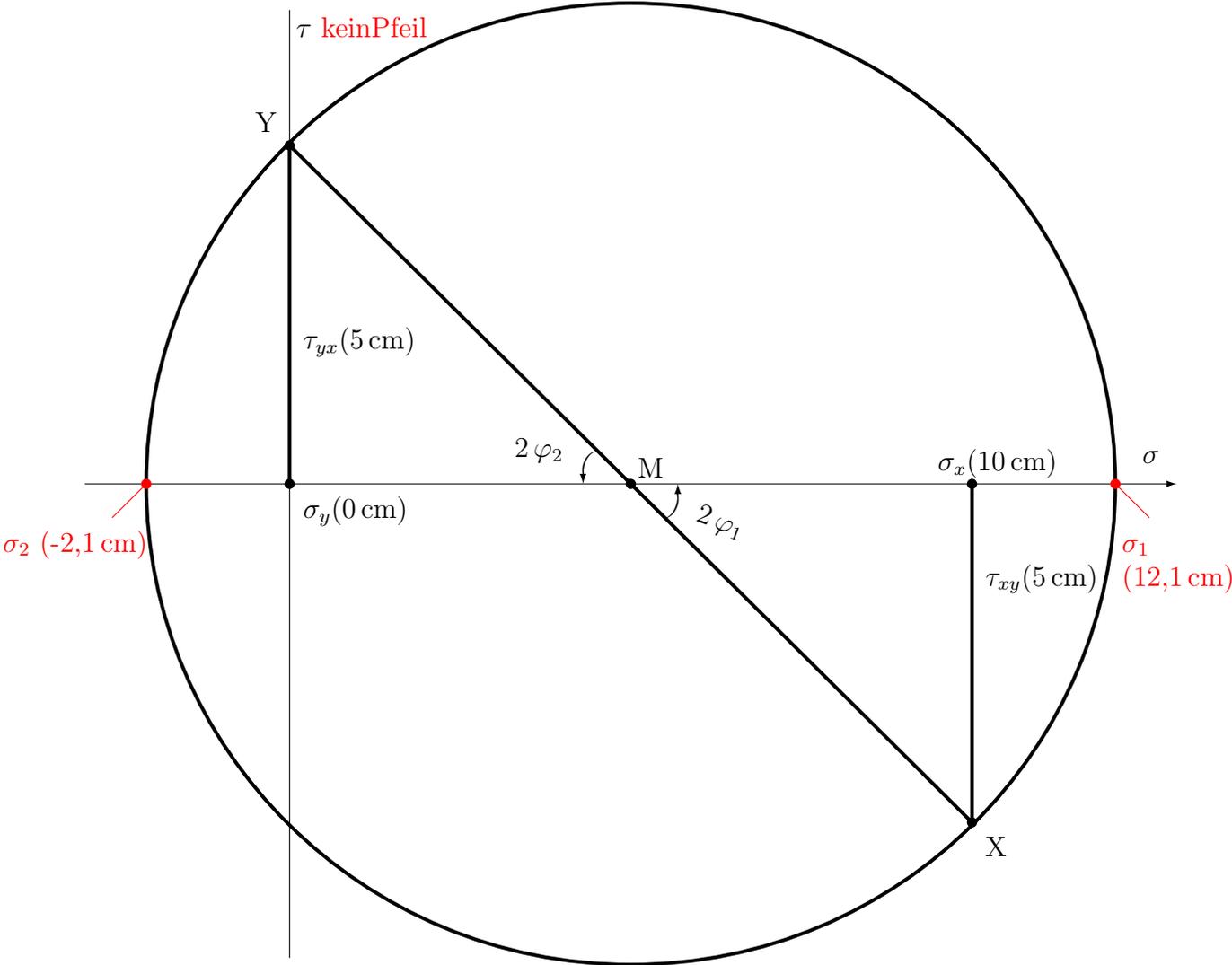
$$\begin{aligned}\sigma_x &= -500 \text{ MPa} & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= 300 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= -100 \text{ MPa}\end{aligned}$$

- Konstruieren Sie den MOHRschen Kreis.
- Bestimmen Sie die Hauptspannungen
- Berechnen Sie die Hauptspannungen mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus der Konstruktion.
- Berechnen Sie die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese.

Zu den schon geschilderten Verwirrungen beim MOHRschen Kreis (das Schiefe ist gerade und das Gerade ist schief), kommt noch hinzu, dass vor dem Zeichnen überlegt werden muss, welchen Zeichenmaßstab man wählt, und wo im  $\sigma, \tau$ -Koordinatensystem der Kreis liegen wird. Es bleibt am Anfang nicht aus, dass einem das „das Papier ausgeht“ oder „Briefmarkenkunst“ erzeugt wird. Richten Sie sich auf einen iterativen Prozess ein. Ziel ist es, dass der zweite Versuch einen großen Kreis liefert, der auf das Zeichenpapier passt. Querformat hilft.

Konstruktion gemäß Vorschrift in der Vorlesung.

- Maßstab festlegen, hier 1 cm entspricht 20 MPa.
- $\sigma_x$  (10 cm nach rechts) und  $\tau_{xy}$  (5 cm willkürlich nach unten)  $\rightarrow$  Punkt X
- $\sigma_y$  (0 cm, also im Ursprung) und  $\tau_{yx}$  (5 cm, jetzt nach oben)  $\rightarrow$  Punkt Y
- X mit Y verbinden  $\rightarrow$  Kreismittelpunkt M
- Kreis zeichnen, Radius =  $\overline{MX} = \overline{MY}$
- Hauptspannung 1 auf der  $\sigma$ -Achse ablesen:  $\overline{0\sigma_1} = 12,1 \text{ cm}$ ,  $\rightarrow \sigma_1 = 242 \text{ MPa}$
- Hauptspannung 2 auf der  $\sigma$ -Achse ablesen:  $\overline{0\sigma_2} = -2,1 \text{ cm}$ ,  $\rightarrow \sigma_2 = -42 \text{ MPa}$
- Ferner gilt bei ebenem Spannungszustand immer  $\sigma_3 = 0$  (kann wichtig werden). Die Vergabe der Indices 1, 2, 3 ist willkürlich.



Berechnung der Hauptspannungen mit der charakteristischen Gleichung

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$
$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Berechnung der drei Invarianten

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \cancel{\sigma_z}, \quad I_1 = 200 \text{ MPa}$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \cancel{\sigma_y \cdot \sigma_z} + \cancel{\sigma_x \cdot \sigma_z} - \tau_{xy}^2 - \cancel{\tau_{yz}^2} - \cancel{\tau_{xz}^2}$$

$$I_2 = -10^4 \text{ MPa}^2$$

$$I_3 = \det(\underline{S})$$

$$I_3 = 0$$

Wegen der Matrixstruktur beim ebenen Spannungszustand in der  $x$ - $y$ -Ebene

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gelten die **roten Streichungen und Festlegungen** immer.

Das charakteristische Polynom

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

vereinfacht sich im ebenen Spannungszustand wegen  $I_3 = 0$  zu

$$\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0 \quad \text{mit} \quad \sigma_1 = 0.$$

Hier gilt

$$\sigma^2 - 200 \cdot \sigma - 10^4 = 0$$

$$\sigma_{2,3} = +100 \pm \sqrt{\frac{4 \cdot 10^4}{4} + 10^4}$$

$$\sigma_{2,3} = +100 \pm \sqrt{2 \cdot 10^4}$$

$$\sigma_2 = 241,4 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -41,4 \text{ MPa}, \quad \sigma_1 = 0$$

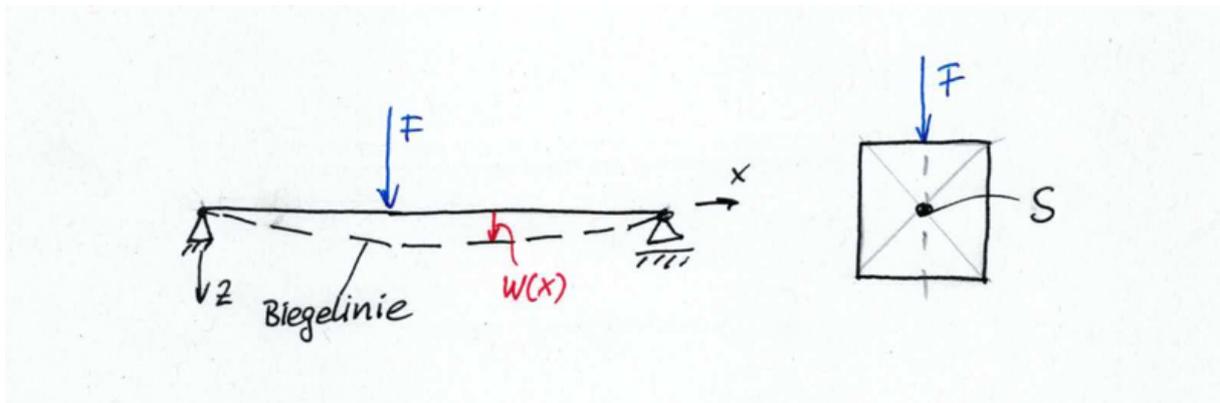
Es gibt lediglich Abweichungen aufgrund der Ablesegenauigkeit beim MOHRschen Kreis. Außerdem sei erinnert, dass die Vergabe der Indices willkürlich ist. Der zweite Aufgabenteil sollte eigenständig gelöst werden. Die errechneten Hauptspannungen lauten

$$\sigma_2 = -661 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = +61 \text{ MPa}, \quad \sigma_1 = 0.$$

■

## 5. Elementare Berechnung der Balkenbiegung

Phänomen: Ein gelagerter Balken wird durch Belastung verformt, gebogen.



Ziel: Es soll für jede Stelle  $x$  des Balkens die Durchbiegung  $w(x)$  berechnet werden.

### 5.1. BERNOULLISCHE ANNAHMEN (Auszüge)

Erst BERNOULLI<sup>17</sup> Annahmen ermöglichen es, mit vertretbarem Aufwand Balkenbiegung zu berechnen.

- a) Alle Kraftwirkungen sind vertikal ( $z$ -Richtung). Wirkungslinien von Kräften gehen durch die Schwerpunkte  $S$  zugehöriger Querschnittsflächen (s.o.).

Wir legen unser Koordinatensystem immer so, dass die Kräfte in oder gegen die  $z$ -Richtung wirken. Bei uns zeigt die  $z$ -Achse immer nach unten. Wenn die Kräfte auf den Schwerpunkt drücken, wird der Balken nicht tordiert. Torsion werden wir hiervon unabhängig in einem späteren Kapitel kennenlernen.

- b) Annahme eines ebenen Spannungszustands

$$\sigma_x \neq 0, \quad \tau_{xz} \neq 0, \quad \tau_{zx} \neq 0.$$

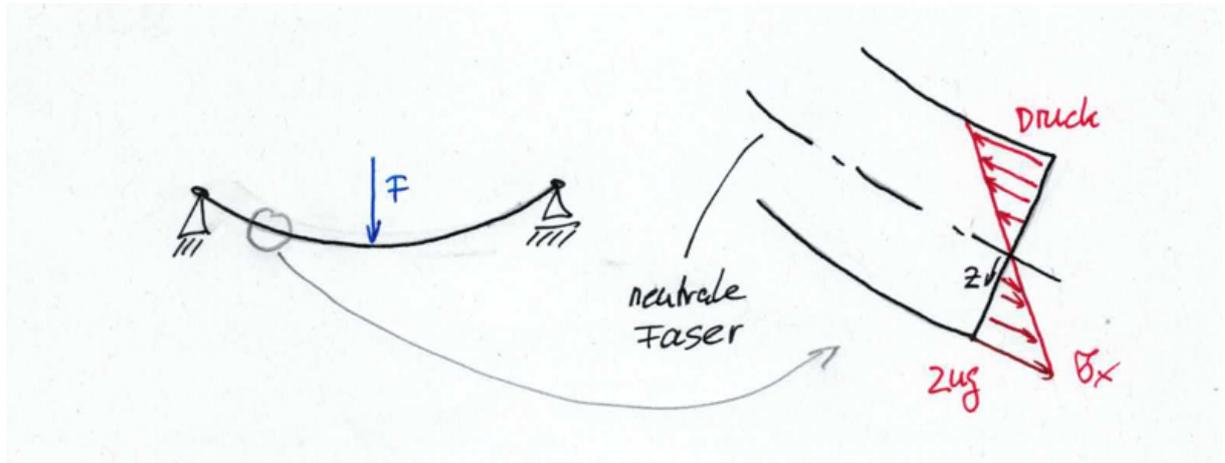
Das hat zur Folge, dass gilt

$$\sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

Hier ist sie, die gute Nachricht. Von unseren neun denkbaren Spannungen bleiben je nach Zählweise drei oder zwei übrig. Da gilt  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  haben wir es nur mit zwei unabhängigen Spannungen zu tun. Das wird doch wohl zu schaffen sein.

<sup>17</sup>Jakob Bernoulli 1655 bis 1705. Jakob ist Spross einer Familie, die aus vielen berühmten Mathematikern bestand: Nikolaus I, Johannes I, Nikolaus II, Daniel I, Johann II, Daniel II. Alle trugen den Nachnamen Bernoulli. Somit nimmt es nicht wunder, dass es eine Vielzahl von BERNOULLISCHEN Gleichungen und Annahmen gibt.

c) Annahme linearer Normalspannungsverteilung



Die wichtigste Spannung  $\sigma_x$  und deren Verlauf legt BERNOULLI schlichtweg durch Verordnung fest. Das ist zwar unbefriedigend, denn den Spannungsverlauf hätten wir ja gerne selbst hergeleitet (haha). Praktisch ist dieser lineare Verlauf allemal. Beim Aufstellen der Formel für  $\sigma_x$ , gleich im Anschluss, werden wir uns hierauf berufen.

Für lange schlanke Stäbe sind mit den BERNOULLISCHEN Annahmen hinreichend genaue Ergebnisse zu erzielen

## 5.2. Flächenträgheitsmomente

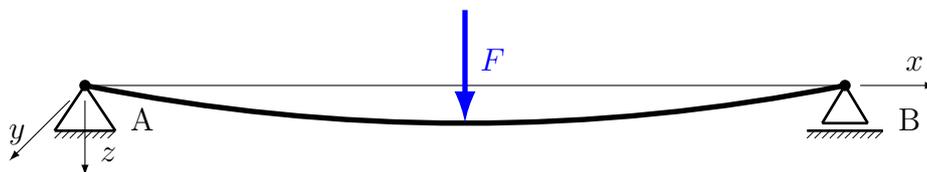
Phänomen: Die Durchbiegung eines Balkens ist nicht nur von Belastung, Lagerung und Material abhängig sondern auch von der Gestaltung des Balkenquerschnitts.

Beispiel:

- flachliegendes Brett  $\rightarrow$  große Durchbiegung,
- hochkant stehendes Brett  $\rightarrow$  kleine Durchbiegung.

Der Einfluss von Querschnitt und Orientierung wird durch die Größe Flächenträgheitsmoment  $I$  berücksichtigt.

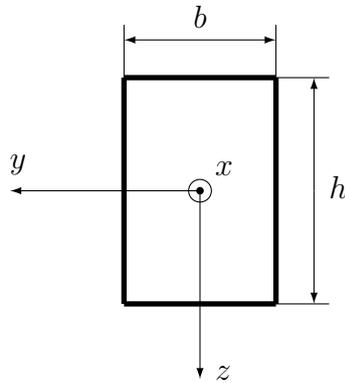
Einführung von Biegeachsen



Hier Biegung um die  $y$ -Achse.

Stellen Sie sich vorübergehend den Balken als eine Panzerkette vor. Die Bolzen, um die sich die Panzerkette krümmen kann, zeigen in  $y$ -Richtung. Daher sprechen wir hier von einer Biegung um die  $y$ -Achse.

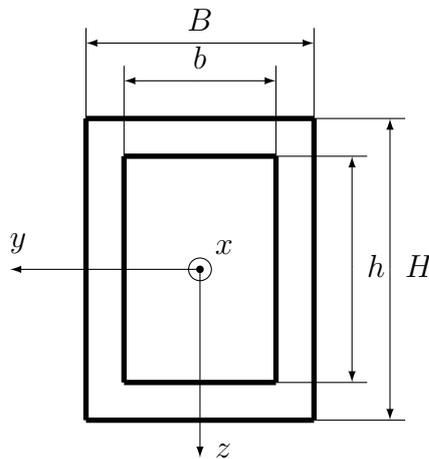
Zugehöriger Balkenquerschnitt z.B.



Biegung um die  $y$ -Achse  $I_y = \frac{b h^3}{12}$

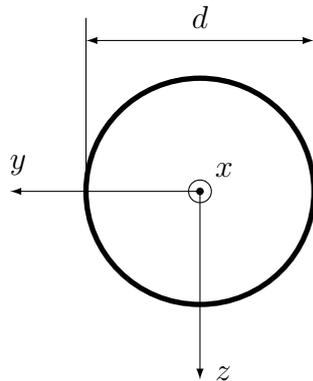
Biegung um die  $z$ -Achse  $I_z = \frac{h b^3}{12}$

Flächenträgheitsmomente für weitere Balkenquerschnitte



Rechteckquerschnitt hohl:

$$I_y = \frac{B H^3 - b h^3}{12}$$



Rundquerschnitt voll:

$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

Weiterführender Hinweis:

Flächenträgheitsmomente sind analytisch berechenbar (Querschnittsfläche  $A$ )

$$I_y = \int_A z^2 \, dA, \quad I_z = \int_A y^2 \, dA.$$

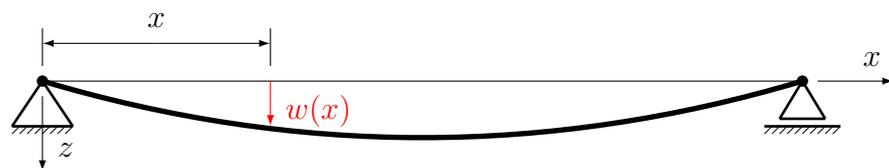
### 5.3. Differentialgleichung der Balkenbiegung

Eine längere Herleitung liefert für die Durchbiegung eines Balkens folgenden Zusammenhang

$$(II.15) \quad I_y E \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_b(x)$$

mit

$w = w(x)$ : Durchbiegung des Balkens an der Stelle  $x$  (= Biegelinie),



$E$ : Elastizitätsmodul,

$I_y$ : Flächenträgheitsmoment um die  $y$ -Achse,

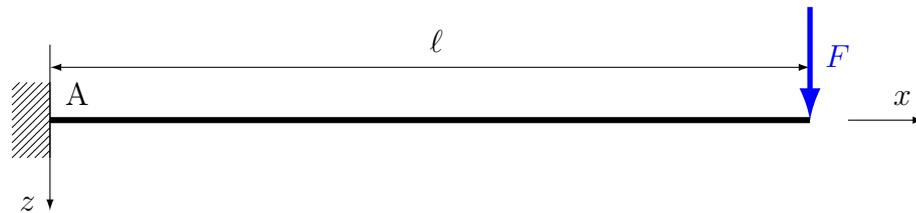
$M_b(x)$ : Biegemomentenverlauf im Balken

Die Differentialgleichung II.15 auf der vorherigen Seite wird häufig abgekürzt angeschrieben:

$$I_y E w'' = -M_b(x),$$

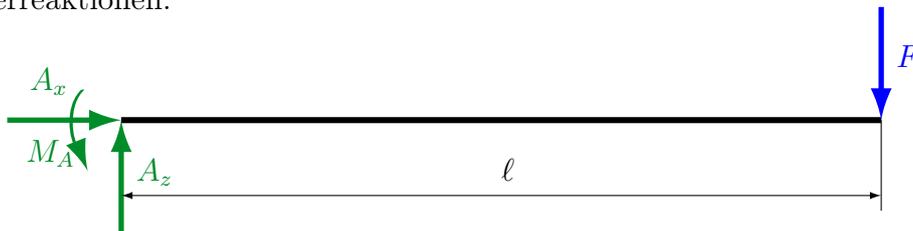
sie ist inhomogen, von zweiter Ordnung und einfach lösbar, wenn  $I_y$  und  $E$  konstante Größen sind.

### Vorgehensweise bei der Ermittlung von Biegelinien am Beispiel



Gegeben:  $I_y$ ,  $E$ ,  $\ell$ ,  $F$ ; Gesucht: Biegelinie.

1. Lagerreaktionen:



$$\sum X \equiv 0 = A_x$$

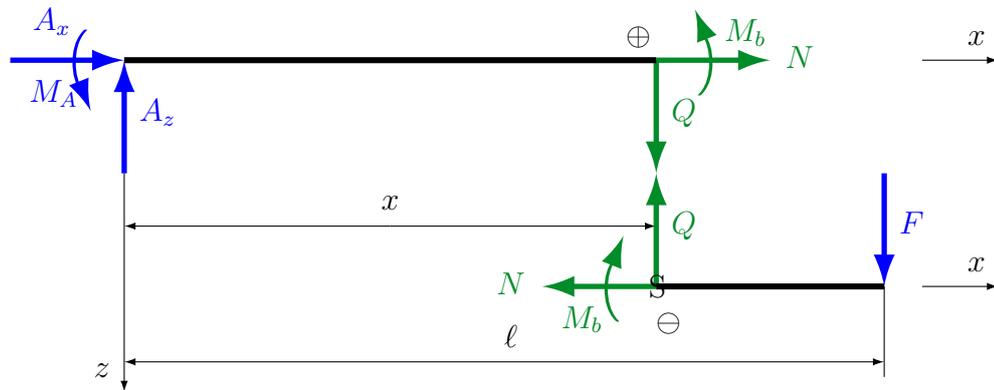
$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F$$

$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = M_A - F \ell$$

$$A_x = 0; \quad A_z = F; \quad M_A = F \ell$$

2. Bereichseinteilung: Nur ein Bereich,  $0 \leq x \leq \ell$ .

3. Schneiden im Bereich an der Stelle  $x$ :



4. KG und MG um S, hier rechts.

$$\begin{aligned}\sum X &\equiv 0 = -N \\ \sum Z &\equiv 0 = -Q + F \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_b - F(\ell - x) \\ N = 0; \quad Q &= F; \quad M_b = -F(\ell - x)\end{aligned}$$

Das Einhalten der Regel mit dem positiven und negativen Schnittufer wird jetzt wichtig, da wir die Durchbiegung  $w$  mit richtiger Vorzeichenlage herausbekommen wollen. [Wir haben es richtig gemacht.](#)

5. DGL der Biegelinie

$$I_y E w'' = -M_b(x)$$

$M_b$  einsetzen

$$I_y E w'' = F(\ell - x)$$

ausmultiplizieren

$$I_y E w'' = F\ell - Fx$$

zweimal integrieren

$$I_y E w' = F\ell x - F \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$I_y E w = F\ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

Beim Integrieren der linken Seite unserer DGL verschwinden nacheinander nur die beiden 'Ableitungsstriche', da  $I_y$  und  $E$  konstante Größen sind. Das Integrieren der Polynome der rechten Seite hatten wir ganz ähnlich bei der Bestimmung von Streckenlasten. Damals waren die Integrationsgrenzen bekannt; das ist hier nicht der Fall, weshalb die Integrationskonstanten  $c_1$ ,  $c_2$  hinzugefügt werden müssen. Die müssen im nächsten Schritt bestimmt werden.

#### 6. Rand- und Übergangsbedingungen:

Bei diesem ersten Beispiel gibt es noch keine Bereichsgrenze, an der der Begriff 'Übergangsbedingung' erläutert werden könnte. Wir heben uns das für spätere Beispiele mit zwei Bereichen auf. Trotzdem verwenden wir die zukunftsichere Überschrift 'Rand- und Übergangsbedingungen'. Wir fangen mit den Randbedingungen an. Ein Balken hat zwei Ränder, links außen und rechts außen. Wir suchen jetzt zwei Aussagen zur Balkenverformung an den Rändern, die bei unserer Lagerung zutreffen. Warum zwei? Wir haben zwei Integrationskonstanten.

Der rechte Rand bringt uns keine Erkenntnis. Die Durchbiegung  $w(x = \ell)$  ist unbekannt. Die Neigung des Balkens am rechten Rand  $w'(x = \ell)$  (gesprochen: we-Strich an der Stelle  $x$  gleich  $\ell$ ) ist auch unbekannt. In beiden Fällen können wir vermuten, dass Durchbiegung und Neigung maximal sind. Das nützt uns nichts.

Der linke Rand ist ergiebiger. Der linke Rand liegt an der Stelle  $x = 0$ . Dort wo der Balken „aus der Wand kommt“ steht fest, dass er nicht nach unten oder oben verschoben werden kann. Wir können festhalten  $w(x = 0) = 0$ . Ferner kann der Balken wegen der dreiwertigen Lagerung dort keinerlei Neigung  $w'$  einnehmen, so dass auch festgehalten werden kann  $w'(x = 0) = 0$ . Die Randbedingungen sind – nebenbei bemerkt – auf dem „Lagerzettel“ aufgeführt, schauen Sie nach.

Wir erkennen wegen der dreiwertigen Lagerung an der Stelle  $x = 0$

$$w(x = 0) = 0, \quad w'(x = 0) = 0$$

Diese beiden Randbedingungen sind vom Typ „Doppelnulld“. Wie James Bond haben sie die Lizenz zum Töten. Wir werden immer wieder feststellen, dass eine Randbedingung vom Typ Doppelnulld eine Integrationskonstante „tötet“, d. h. zu Null macht.

Beim Abarbeiten der Rand- und Übergangsbedingungen werden wir künftig eine strategische Reihenfolge einhalten. Auch wenn das bei diesem Beispiel noch nicht von Bedeutung ist, wird sie dennoch vorgestellt.

Strategische Reihenfolge

- a) Doppelnulld mit Strich, Beispiel  $w'(x = 0) = 0$
- b) Doppelnulld ohne Strich,  $w(x = 0) = 0$

- c) Übergangsbedingung mit Strich, Beispiel  $w'_I(x = a) = w'_{II}(x = a)$
- d) Übergangsbedingung ohne Strich,  $w_I(x = a) = w_{II}(x = a)$
- e) Einfachnull mit Strich, Beispiel  $w'(x = \ell) = 0$
- f) Einfachnull ohne Strich,  $w(x = \ell) = 0$

Wenn wir nach dieser Reihenfolge vorgehen, wird es der Regelfall sein, dass Schritte übersprungen werden müssen, da entsprechende Bedingungen gar nicht vorhanden sind. Im vorliegenden Fall können wir a) und b) anwenden, den Rest nicht.

Die Übergangsbedingungen wurden noch nicht erläutert. Wir machen das, wenn wir ein Beispiel mit den zwei Bereichen I und II haben. Im Vorfeld versuchen Sie trotzdem nachzuvollziehen, dass bei einer Bereichsgrenze an der Stelle  $x = a$  der Balken keinen Knick hat und keinen Sprung macht. Nichts anderes sagen diese Übergangsbedingungen aus. Die Übergangsbedingungen sehen immer gleich aus, bis auf die Bezeichnung  $a$ . Da kann etwas Anderes stehen.

Wir fahren fort.

a) Doppelnul mit Strich,  $w'(x = 0) = 0$  wird in eine passende Gleichung „mit Strich“ eingesetzt. Folgende Gleichung von oben passt:

$$I_y E w' = F \ell x - F \frac{x^2}{2} + c_1$$

einsetzen

$$I_y E 0 = F \ell 0 - F \frac{0^2}{2} + c_1$$

$$c_1 = 0$$

b) Doppelnul ohne Strich,  $w(x = 0) = 0$  wird in eine passende Gleichung „ohne Strich“ eingesetzt. Folgende Gleichung passt:

$$I_y E w = F \ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

einsetzen

$$I_y E 0 = F \ell \frac{0^2}{2} - F \frac{0^3}{6} + c_1 0 + c_2$$

$$c_2 = 0$$

M ist mit James zufrieden, Q auch.

7. Konstanten einsetzen, nach  $w$  auflösen

Wir benutzen die Gleichung „ohne Strich“.

$$I_y E w = F \ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$$

$c_1, c_2$  einsetzen

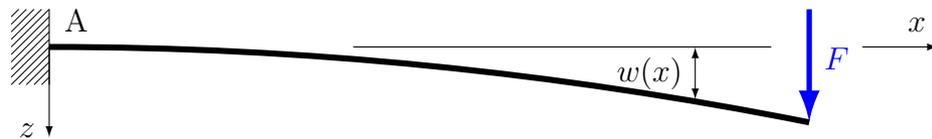
$$I_y E w = F \ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6}$$

nach  $w$  auflösen

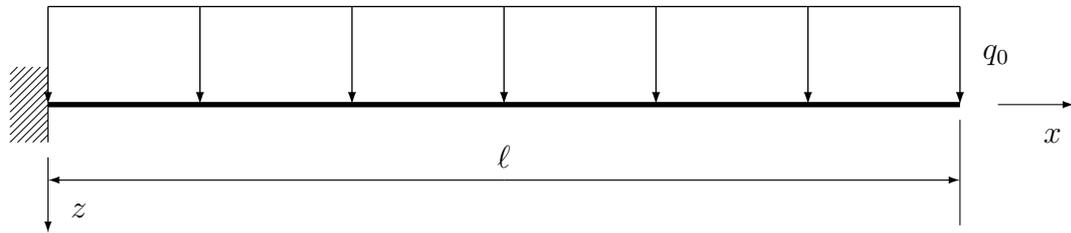
$$w(x) = \frac{F x^2}{I_y E} \left( \frac{\ell}{2} - \frac{x}{6} \right)$$

Zum Schluss wird darauf hingewiesen, dass  $w$  von  $x$  abhängig ist. **Aus Faulheitsgründen wurde das  $(x)$  während der Rechnung weggelassen.**

Diese Gleichung wird Biegelinie genannt. Auch die sichtbare Verformung des Balkens wird so genannt.

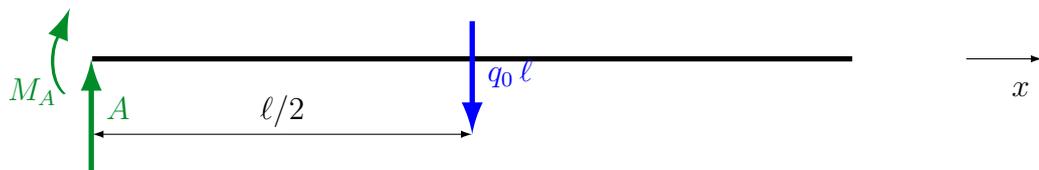


## 5.3.1. Übungsaufgabe, Streckenlast, Biegelinie



Gegeben:  $l$ ,  $E$ ,  $I_y$ ,  $q_0$ , Gesucht: Biegelinie

## 1. Lagerreaktionen



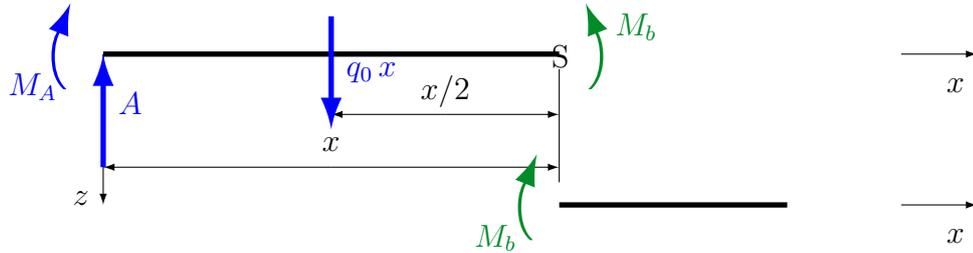
$$\begin{aligned} \sum Z \equiv 0 &= -A + q_0 l, & A &= q_0 l \\ \sum M_{[A]} \equiv 0 &= -M_A - q_0 \frac{\ell^2}{2} & M_A &= -q_0 \frac{\ell^2}{2} \end{aligned}$$

## 2. Bereichseinteilung

Achtung: Die Ersatzkraft  $q_0 \ell$  muss jetzt entfernt werden. Daher nur ein Bereich  $0 \leq x \leq \ell$ .

3. Schneiden im Bereich an der Stelle  $x$ 

Da wir nur den Biegemomentenverlauf benötigen, lassen wir, wie schon bei den Lagerreaktionen die Größen weg, die entweder Null sind ( $N$ ) oder uninteressant sind ( $Q$ ). Das ist straflos möglich, da wir anschließend Momentengleichgewicht um die Schnittstelle machen. Weggelassene Kräfte haben dort keinen Hebelarm.



4. MG um S hier links

$$\begin{aligned}\sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_b + q_0 x \frac{x}{2} - A x - M_A \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = M_b + q_0 \frac{x^2}{2} - q_0 \ell x + q_0 \frac{\ell^2}{2} \\ M_b &= -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \ell x - q_0 \frac{\ell^2}{2}\end{aligned}$$

5. DGL der Biegelinie

$$\begin{aligned}I_y E w'' &= -M_b(x) \\ I_y E w'' &= q_0 \left[ \frac{x^2}{2} - \ell x + \frac{\ell^2}{2} \right] \\ I_y E w' &= q_0 \left[ \frac{x^3}{6} - \ell \frac{x^2}{2} + \frac{\ell^2}{2} x \right] + c_1 \\ I_y E w &= q_0 \left[ \frac{x^4}{24} - \ell \frac{x^3}{6} + \frac{\ell^2 x^2}{4} \right] + c_1 x + c_2\end{aligned}$$

6. Rand- und Übergangsbedingungen

Mit einem dreiwertigen Lager bei  $x = 0$  gilt

$$w'(x = 0) = 0, \quad w(x = 0) = 0$$

Diese beiden Randbedingungen vom Typ Doppelnul führen zu

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

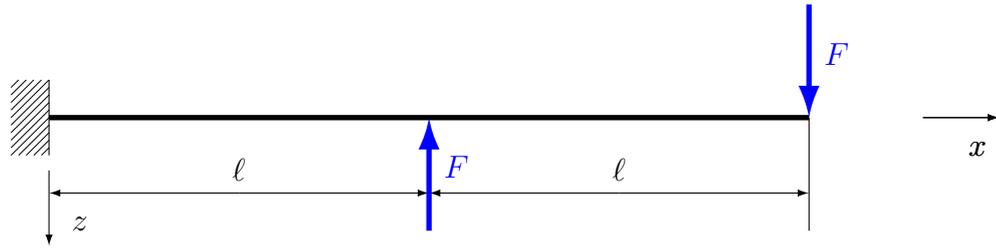
7. Auflösen nach  $w$

$$\begin{aligned}w &= \frac{q_0}{I_y E} \left[ \frac{x^4}{24} - \ell \frac{x^3}{6} + \frac{\ell^2 x^2}{4} \right] \\ w(x) &= \frac{q_0 x^2}{24 I_y E} [x^2 - 4 \ell x + 6 \ell^2]\end{aligned}$$

Zum Schluss erinnern wir daran, dass  $w$  von  $x$  abhängig ist (reine Kosmetik).

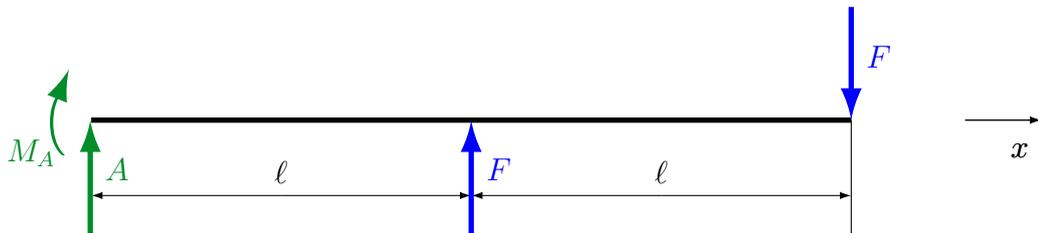
Diese Aufgabe und auch die nächste könnte jetzt noch ergänzt werden, indem Zahlenwerte gegeben werden.  $I_y$  könnte verschleiert werden, indem Breite  $b$  und Höhe  $h$  eines Rechteckquerschnitts angegeben werden. In einer Klausur korrigiert es sich viel besser, wenn nicht nach der Biegelinie gefragt wird, sondern z. B. wie weit senkt sich der Balken bei  $x = \ell/2$  ab. Dann muss in der Biegelinie jedes  $x$  durch  $\ell/2$  ersetzt werden. Wenn der Zahlenwert stimmt, die Einheit dabei steht und der Rechenweg passig erscheint, gibt es volle Punktzahl. Das dauert 15 Sekunden – und nächste Aufgabe. So macht Korrigieren Spaß. ■

## 5.3.2. Übungsaufgabe, zwei Bereiche, Biegelinie



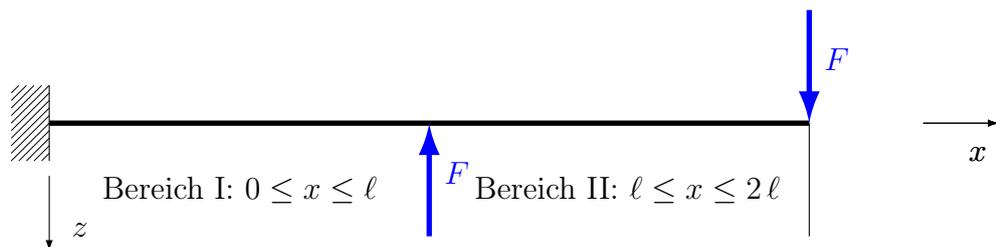
Gegeben:  $l$ ,  $E$ ,  $I_y$ ,  $F$ , Gesucht: Biegelinie

## 1. Lagerreaktionen

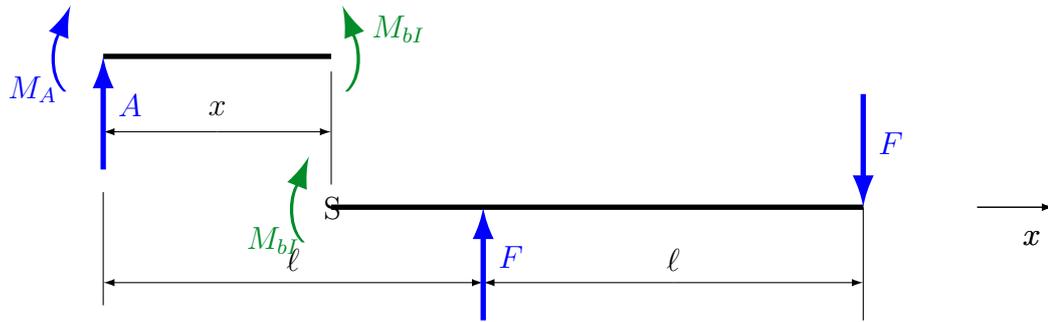


$$\begin{aligned} \sum Z \equiv 0 &= -A - F + F & A &= 0 \\ \sum M_{[A]} \equiv 0 &= -M_A + F l - F 2l & M_A &= -F l \end{aligned}$$

## 2. Bereichseinteilung



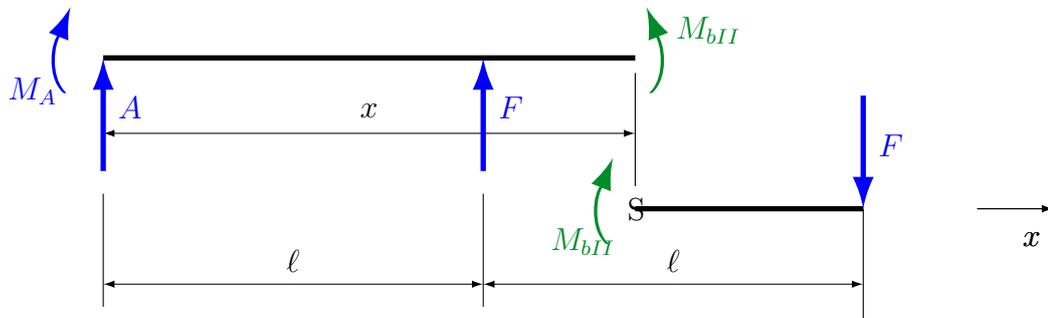
## 3. a Schneiden im Bereich I an der Stelle x



4. a MG um S, rechtes Balkenteil

$$\begin{aligned}\sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_{bI} + F(\ell - x) - F(2\ell - x) \\ M_{bI} &= F\ell - Fx - 2F\ell + Fx \\ M_{bI} &= -F\ell\end{aligned}$$

3. b Schneiden im Bereich II an der Stelle x



4. b MG um S, rechtes Balkenteil

$$\begin{aligned}\sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_{bII} - F(2\ell - x) \\ M_{bII} &= -2F\ell + Fx\end{aligned}$$

Da wir zwei Bereiche haben, haben wir zwei verschiedene Biegemomentenverläufe; also werden wir auch zwei Biegelinien haben. Für den Bereich I  $w_I$  und für Bereich II  $w_{II}$ . Wir müssen also zweigleisig fortfahren.

5. a DGL der Biegelinie Bereich I

$$\begin{aligned}I_y E w_I'' &= -M_{bI}(x) \\ I_y E w_I'' &= F\ell \\ I_y E w_I' &= F\ell x + c_1 \quad (1)\end{aligned}$$

$$I_y E w_I = F\ell \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad (2)$$

## 5. b DGL der Biegelinie Bereich II

$$\begin{aligned}
I_y E w''_{II} &= -M_{bII}(x) \\
I_y E w''_{II} &= 2 F \ell - F x \\
I_y E w'_{II} &= 2 F \ell x - F \frac{x^2}{2} + c_3 \quad (3) \\
I_y E w_{II} &= 2 F \ell \frac{x^2}{2} - F \frac{x^3}{6} + c_3 x + c_4 \\
I_y E w_{II} &= F \ell x^2 - F \frac{x^3}{6} + c_3 x + c_4 \quad (4)
\end{aligned}$$

## 6. Rand- und Übergangsbedingungen

Wir haben ein dreiwertiges Lager an der Stelle  $x = 0$  und (erstmalig) eine Bereichsgrenze an der Stelle  $x = \ell$ .

- a)  $w'_I(x = 0) = 0$
- b)  $w_I(x = 0) = 0$
- c)  $w'_I(x = \ell) = w'_{II}(x = \ell)$
- d)  $w_I(x = \ell) = w_{II}(x = \ell)$

Wir kontrollieren: Vier Konstanten benötigen vier Rand- und Übergangsbedingungen, passt.

Die Bedingungen a) und b) sind uns wohlbekannt, sie sind vom Typ Doppelnul und sorgen dafür dass zwei Konstanten zu Null werden.

Die Übergangsbedingungen c) und d) sind neu für uns. Sie gelten so an jeder Bereichsgrenze. In dieser Aufgabe liegt sie bei  $x = \ell$ . Daher sehen wir an vier verschiedenen Stellen ein und den selben Ausdruck ( $x = \ell$ ).

Betrachten wir Bedingung c): Die Neigung unserer Biegelinie ( $w'$ ) an der Stelle der Bereichsgrenze ( $x = \ell$ ) ist von beiden Seiten (Bereich I, Bereich II) betrachtet gleich groß. Wir wissen nicht, wie groß die Neigung dort ist. Wir wissen nur, dass der Balken an der Bereichsgrenze keinen Knick hat.

Betrachten wir Bedingung d): Die Durchbiegung ( $w$ -ohne Strich) an der Stelle der Bereichsgrenze ( $x = \ell$ ) ist von beiden Seiten (Bereich I, Bereich II) betrachtet gleich groß. Wir wissen nicht, wie groß die Durchbiegung dort ist. Wir wissen nur, dass der Balken an der Bereichsgrenze keinen Sprung hat, keine Stufe hat.

Wir vergewissern uns, dass die Reihenfolge der Bedingungen strategisch richtig ist. Erst Doppelnulld, dann Übergang, dann Einfachnull (haben wir zum Glück nicht) und immer mit Strich zuerst, passt.

### 7. Konstanten bestimmen

Bedingung a) in Gleichung (1) einsetzen liefert  $c_1 = 0$ .

Bedingung b) in Gleichung (2) einsetzen liefert  $c_2 = 0$ .

Wir werden jetzt für die Bedingung c) die Gleichungen (1) und (3) verwenden. Wir sollen  $w'_I(x = \ell)$  mit  $w'_{II}(x = \ell)$  gleichsetzen. Schlau wie wir sind, werden wir  $I_y E w'_I(x = \ell)$  mit  $I_y E w'_{II}(x = \ell)$  gleichsetzen. Wir nehmen also die rechten Seiten von Gleichung (1) und (3), ersetzen  $x$  durch  $\ell$  und setzen diese beiden rechten Seiten gleich. Unsere Kenntnis über  $c_1$  wenden wir natürlich an.

Bedingung c) mit den Gleichungen (1) und (3)

$$F \ell^2 = 2 F \ell^2 - F \frac{\ell^2}{2} + c_3$$

$$c_3 = -F \frac{\ell^2}{2}$$

Ganz entsprechend gehen wir mit Bedingung d) und den Gleichungen (2) und (4) um. Unsere Kenntnisse über  $c_1, c_2, c_3$  wenden wir an.

$$F \frac{\ell^3}{2} = F \ell^3 - F \frac{\ell^3}{6} - F \frac{\ell^3}{2} + c_4$$

$$c_4 = F \frac{\ell^3}{6}$$

### 8. Nach $w_I, w_{II}$ auflösen

Gleichung (2) liefert

$$w_I(x) = \frac{F \ell x^2}{2 I_y E}$$

Gleichung (4) liefert

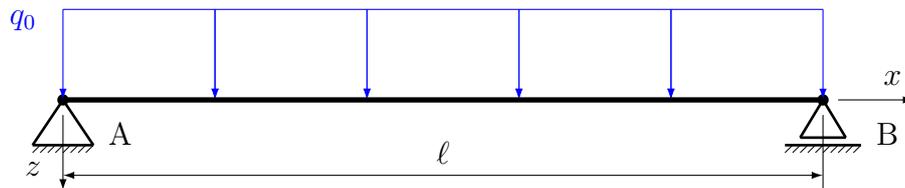
$$w_{II}(x) = \frac{F}{I_y E} \left[ \ell x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{\ell^2 x}{2} + \frac{\ell^3}{6} \right]$$

$$w_{II}(x) = \frac{F}{6 I_y E} [6 \ell x^2 - x^3 - 3 \ell^2 x + \ell^3]$$

Die letzte Vereinfachung ist nicht wirklich nötig. Es gibt keinen Punktabzug, wenn noch etwas ausgeklammert werden könnte. Es ist sogar taktisch klug, in der Klausur das mit dem Ausklammern nicht zu übertreiben. Fehler dabei wären sehr ärgerlich (genau: Kurz vorm locus ...).

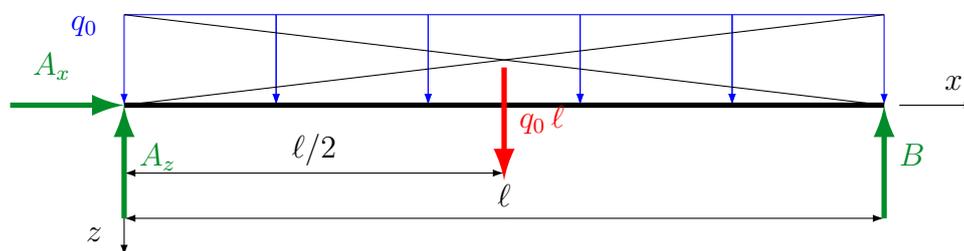
■

## 5.3.3. Übung, Streckenlast, Durchbiegung



Gegeben:  $I_y$ ,  $E$ ,  $q_0$ ,  $l$ , gesucht: Durchbiegung an der Stelle  $x = \frac{l}{2}$ .

1.) Lagerreaktionen



$$\sum X \equiv 0 = A_x$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z - B + q_0 l$$

$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = B l - q_0 l \cdot \frac{l}{2}$$

$$B l = \frac{q_0 l^2}{2}$$

$$B = \frac{q_0 l^2}{2 l}$$

$$B = \frac{q_0 l}{2}$$

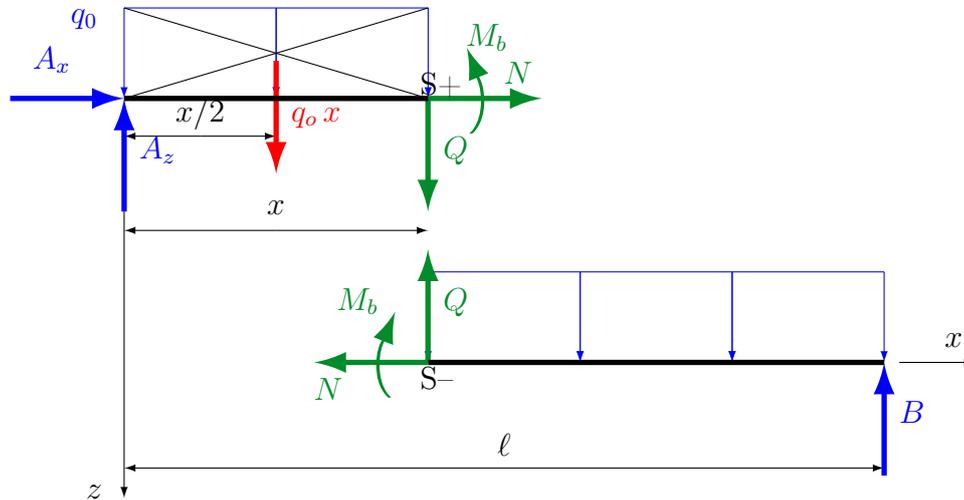
$$A_z = -B + q_0 l$$

$$A_z = -\frac{q_0 l}{2} + q_0 l$$

$$A_z = q_0 \frac{l}{2}$$

## 2.) Bereichseinteilung

Nur ein Bereich, es gilt  $0 \leq x \leq \ell$

3.) Schneiden im Bereich an der Stelle  $x$ 

## 4.) MG um S

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = -A_z x + M_b + q_0 x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_b = A_z x - q_0 \frac{x^2}{2}$$

$$M_b = q_0 \frac{\ell}{2} x - q_0 \frac{x^2}{2}$$

## 5.) DGL der Biegelinie

$$I_y E w'' = -M_b(x)$$

$$I_y E w'' = -\frac{q_0 \ell x}{2} + \frac{q_0 x^2}{2}$$

$$I_y E w' = -\frac{q_0 \ell x^2}{4} + \frac{q_0 x^3}{6} + c_1$$

$$I_y E w = -\frac{q_0 \ell x^3}{12} + \frac{q_0 x^4}{24} - c_1 x + c_2$$

## 6.) Randbedingungen

a)  $w(x=0) = 0$

b)  $w(x=\ell) = 0$

RB a) ist vom Typ Doppelnul und liefert  $c_2 = 0$ .

RB b)

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{q_0 \ell^4}{12} + \frac{q_0 \ell^4}{24} - c_1 \ell \\
 0 &= -\frac{q_0 \ell^3}{12} + \frac{q_0 \ell^3}{24} - c_1 \\
 c_1 &= \frac{2 \cdot q_0 \ell^3}{24} - \frac{q_0 \ell^3}{24} \\
 c_1 &= \frac{q_0 \ell^3}{24}
 \end{aligned}$$

Konstanten einsetzen und auflösen nach  $w$

$$\begin{aligned}
 I_y E w &= -\frac{q_0 \ell x^3}{12} + \frac{q_0 x^4}{24} - \frac{q_0 \ell^3 x}{24} \\
 w &= \frac{q_0}{24 E I_y} [x^4 - 2 \ell x^3 + \ell^3 x]
 \end{aligned}$$

Durchbiegung an der Stelle  $x = \frac{\ell}{2}$

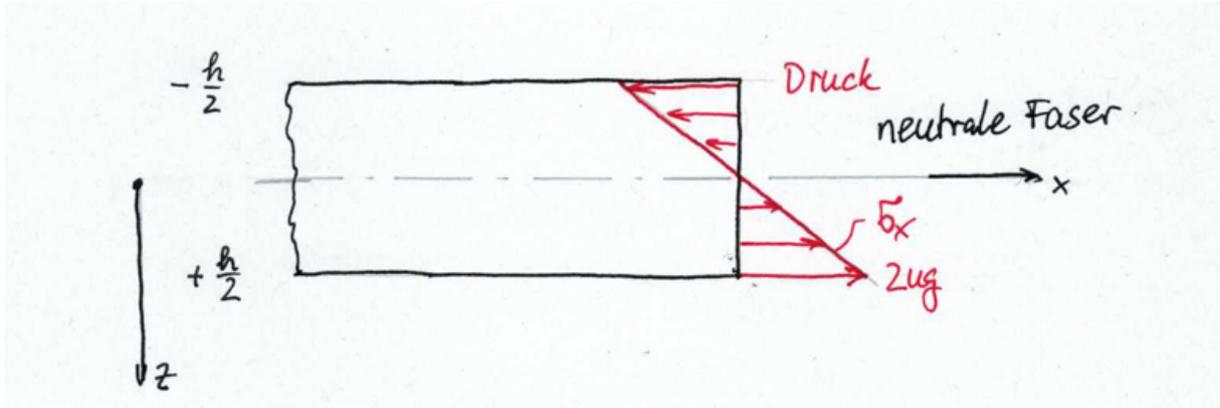
$$\begin{aligned}
 w &= \frac{q_0}{24 E I_y} \left[ \frac{\ell^4}{16} - \frac{2}{8} \ell^4 + \frac{1}{2} \ell^4 \right] \\
 w &= \frac{q_0 \ell^4}{24 E I_y} \left[ \frac{1}{16} - \frac{4}{16} + \frac{8}{16} \right] \\
 w &= \frac{5}{384} \frac{q_0 \ell^4}{E I_y}
 \end{aligned}$$

■

## 5.4. Spannungen am Biegebalken

Auf Grund der BERNOULLISchen Annahmen gilt

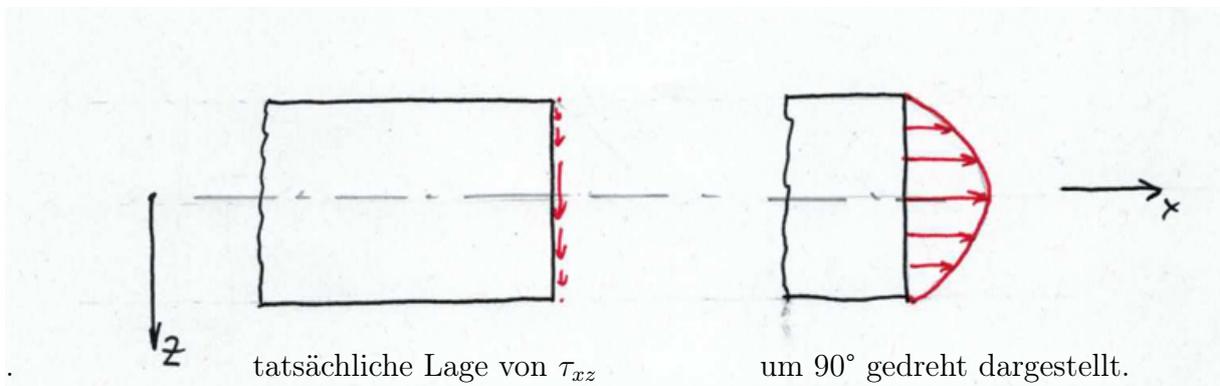
$$(II.16) \quad \sigma_x = \frac{M_b(x)}{I_y} z$$



Die maximal auftretende Normalspannung  $\hat{\sigma}_x$  (= Auslegungskriterium) ist

$$(II.17) \quad \hat{\sigma}_x = \frac{M_{b\max}}{I_y} z_{\max}$$

Von untergeordneter Bedeutung beim Auslegen von Balken ist die einzige Schubspannung



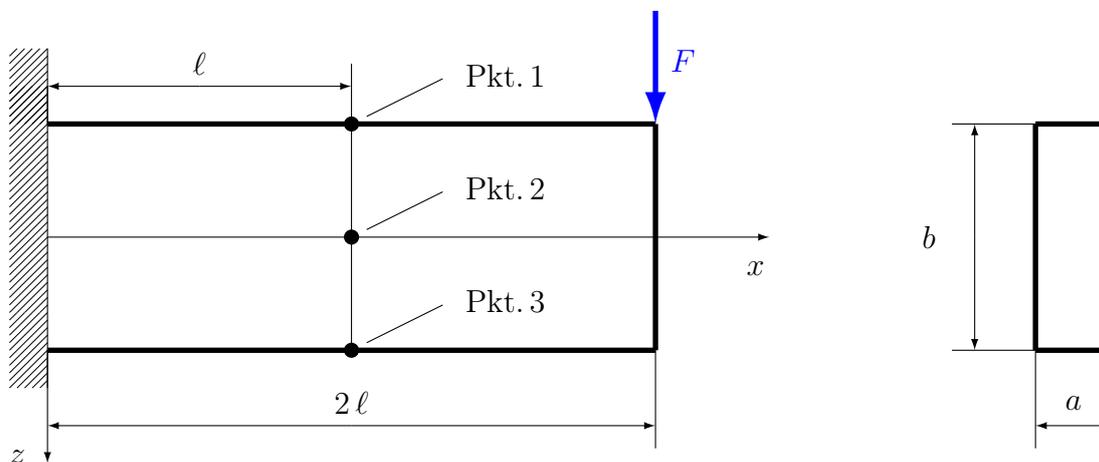
Sie hat parabolischen Verlauf und berechnet sich aus der Querkraft  $Q$  im Balken

$$(II.18) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2I_y} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

■

## 5.4.1. Übungsaufgabe, MOHRsche Kreise am Biegebalken

Gegeben ist ein langer schlanker Balken, auch wenn er nicht so aussieht.



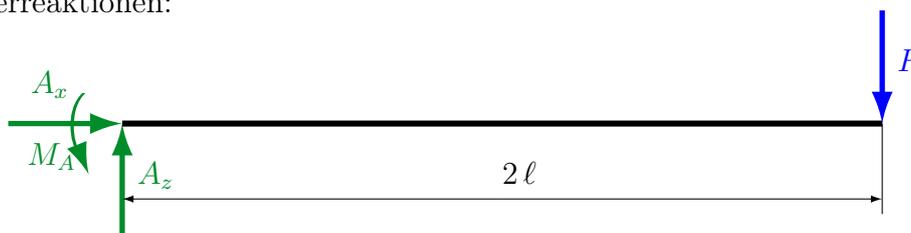
Gegeben:  $F = 150 \text{ N}$ ,  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$ ,  $\ell = 1 \text{ m}$ .

Gesucht: MOHRsche Kreise für die Punkte 1, 2, 3.

## Lösung

Durch die Frage nach MOHRsche Kreisen liegt hier eindeutig eine Frage nach Spannungen vor.

1. Lagerreaktionen:



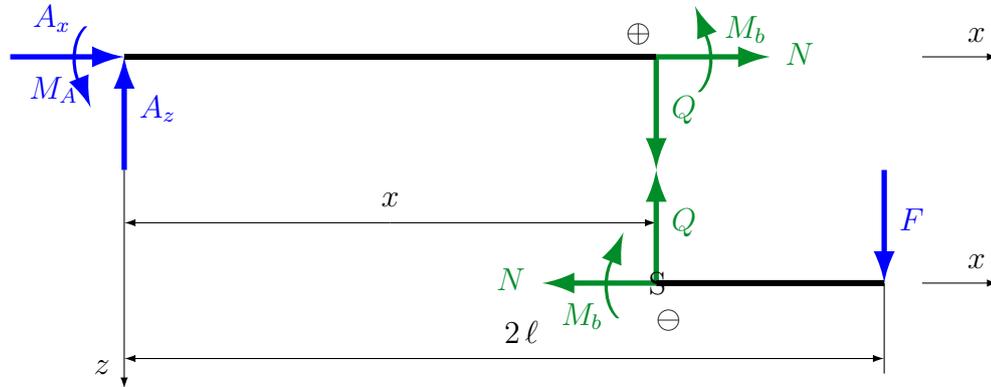
$$\sum X \equiv 0 = A_x$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F$$

$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = M_A - F \cdot 2\ell$$

$$A_x = 0; \quad A_z = F; \quad M_A = 2F\ell$$

2. Bereicheinteilung: Nur ein Bereich,  $0 \leq x \leq 2\ell$ .
3. Schneiden im Bereich an der Stelle  $x$ :



4. KG und MG um S, hier rechts.

$$\begin{aligned} \sum X &\equiv 0 = -N \\ \sum Z &\equiv 0 = -Q + F \\ \sum M_{[S]} &\equiv 0 = -M_b - F(2\ell - x) \\ N = 0; \quad Q &= F; \quad M_b = -F(2\ell - x) \end{aligned}$$

5. Suche nach Spannungen an der Stelle  $x = \ell$

Ginge es um eine Balkenauslegung, würden wir unter 5. nach dem maximalen Biegemoment suchen. Hier sollen wir Spannungen an bestimmten Punkten herausbekommen.

$$N(x = \ell) = 0; \quad Q(x = \ell) = F; \quad M_b(x = \ell) = -F\ell$$

6.  $z$ -Position der Punkte 1, 2, 3 festlegen

Ginge es um eine Balkenauslegung, würden wir unter 6. nach  $|z_{\max}|$  suchen

$$\text{Punkt 1: } z = -\frac{b}{2}, \quad \text{Punkt 2: } z = 0, \quad \text{Punkt 3: } z = +\frac{b}{2}$$

## 7. Spannungsberechnung

Für MOHRsche Kreise müssen wir auch die Schubspannungen berechnen.

$$\sigma_x = \frac{M_b(x)}{I_y} z$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2I_y} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Ferner gilt

$$I_y = \frac{b h^3}{12}$$

Hier finden Sie eine meiner Gemeinheiten, die Sie auch in der Klausur erwarten dürfen. Wir hätten gerne Balken mit den Querschnittsabmaßen Breite  $b$  und Höhe  $h$ . Unser Balken hat die Breite  $a$  und die Höhe  $b$ . Das ist sehr verwirrend.

Mit den hier verwendeten Maßen gilt

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2I_y} \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right)$$

$$I_y = \frac{a b^3}{12}$$

**Punkt 1:**  $z = -\frac{b}{2}$

$$\sigma_x = \frac{-F \ell \cdot 12}{a b^3} \left( -\frac{b}{2} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{6 F \ell}{a b^2}, \quad \sigma_x = +225 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2I_y} \left( \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

**Punkt 2:**  $z = 0$

$$\sigma_x = \frac{-F \ell \cdot 12}{a b^3} \cdot 0$$

$$\sigma_x = 0$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{F \cdot 12}{2 a b^3} \left( \frac{b^2}{4} - 0 \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{3 F}{2 a b}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 1,125 \text{ MPa}$$

**Punkt 3:**  $z = +\frac{b}{2}$

$$\sigma_x = -\frac{6 F \ell}{a b^2}, \quad \sigma_x = -225 \text{ MPa}$$

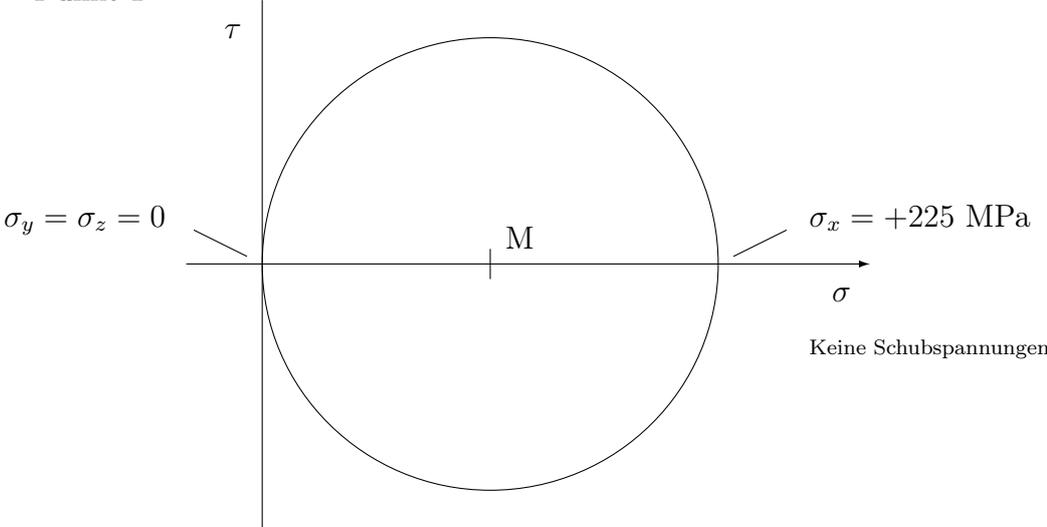
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

Was sagen uns diese Ergebnisse? Am oberen Balkengurt haben wir eine positive Normalspannung, also Zug, am unteren demzufolge Druck. Diese Vorzeichenlagen sind verlässlich, da wir von Anfang an den Stunt mit dem positiven und negativen Schnittufer machen. Erwartungsgemäß sind die Schubspannungen an den Außengurten Null.

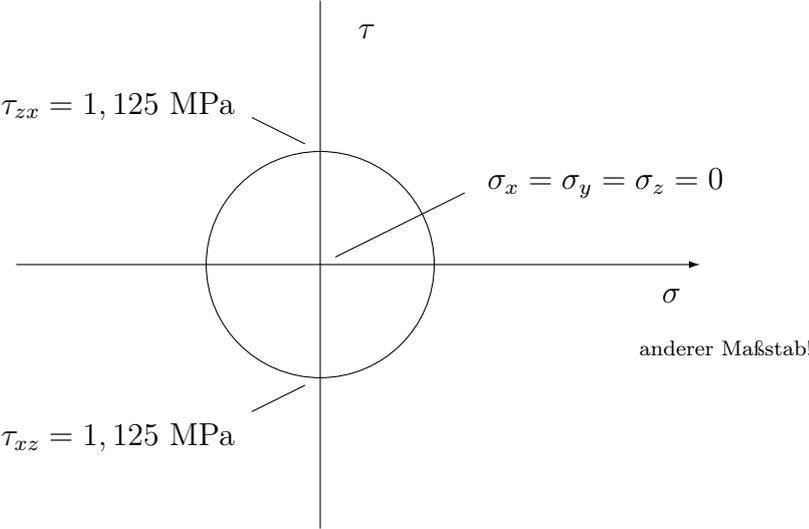
An der neutralen Faser (=  $x$ -Achse) ist die Normalspannung Null (deshalb heißt sie so, die neutrale Faser), die einzigen Schubspannungen am Biegebalken haben an dieser Stelle das 'imposante' Maximum von  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 1,125 \text{ MPa}$ . Es steht also 1:225. Schubspannungen haben noch nie einen Balken bei reiner Biegung zerstört.

8. MOHRsche Kreise

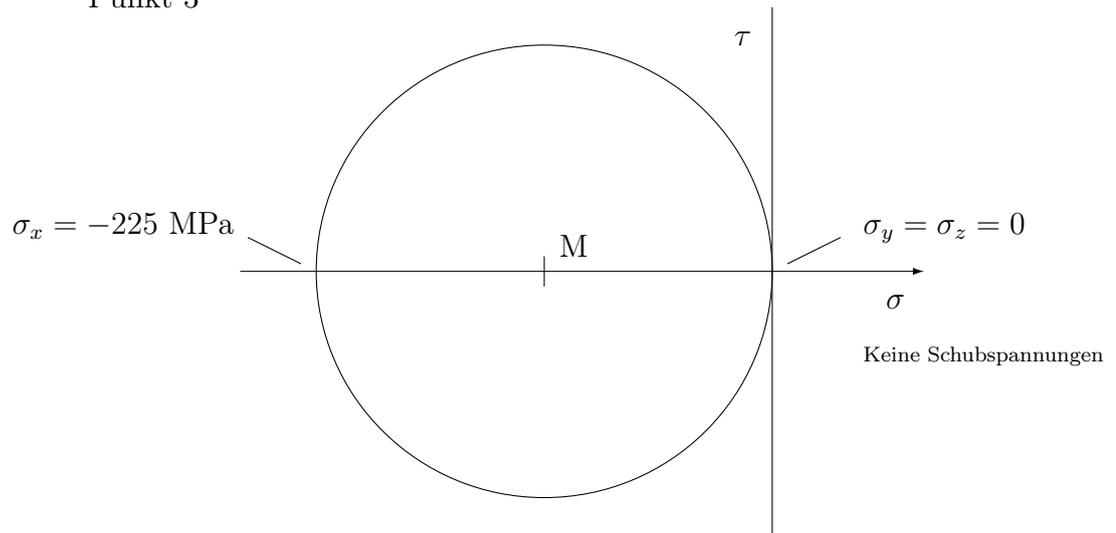
Punkt 1



Punkt 2

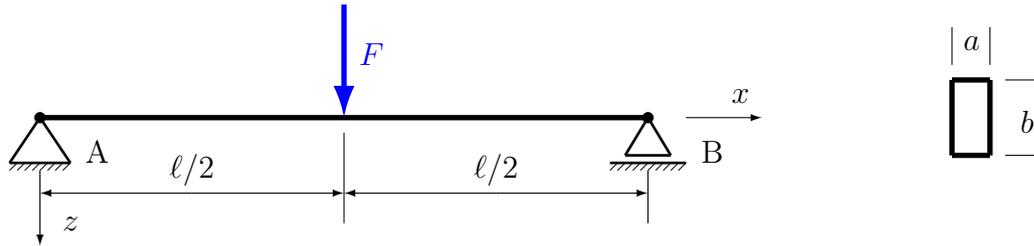


Punkt 3



### 5.4.2. Übung, Balken mit Einzelkraft, Sicherheit gegen Fließen

Gegeben



$$F = 200 \text{ N}, \quad a = 10 \text{ mm}, \quad b = 20 \text{ mm}, \quad l = 2 \text{ m}, \quad \sigma_F = 310 \text{ MPa}$$

Wie groß ist die Sicherheit gegen Fließen?

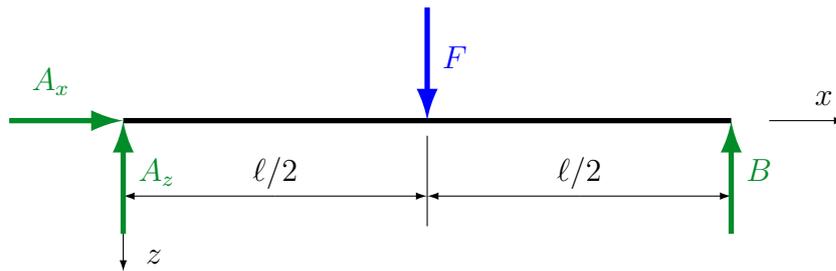
#### Vorgehensweise bei der Dimensionierung von Balken

1. Momentenverlauf bestimmen,
2. maximales Biegemoment feststellen (graphische Darstellung),
3.  $\hat{\sigma}_x = \frac{M_{b\max}}{I_y} z_{\max}$  berechnen.
4. Da bei  $z_{\max}$  die Schubspannung  $\tau_{xz} = 0$  ist, gilt auch

$$\hat{\sigma}_x = \sigma_v < \sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_F}{s_F} \quad \text{ggf.} \quad \dots = \frac{\sigma_B}{s_B}.$$

An den gefährdeten Außengurten ist  $\sigma_x$  die einzige von Null verschiedene Spannung. Demzufolge liegt dort einachsiger Spannungszustand vor. Vergleichsspannungshypothesen können wir uns also schenken.

## 1. Lagerreaktionen



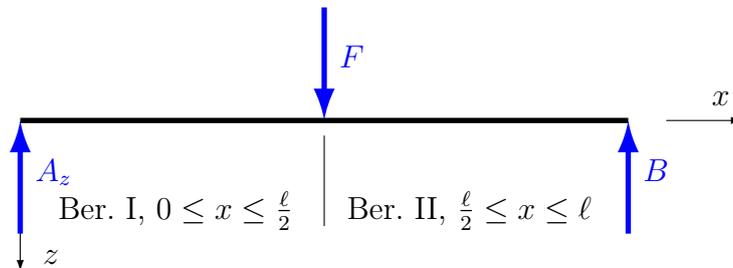
$$\sum X \equiv 0 = A_x = 0$$

$$\sum Z \equiv 0 = -A_z + F - B$$

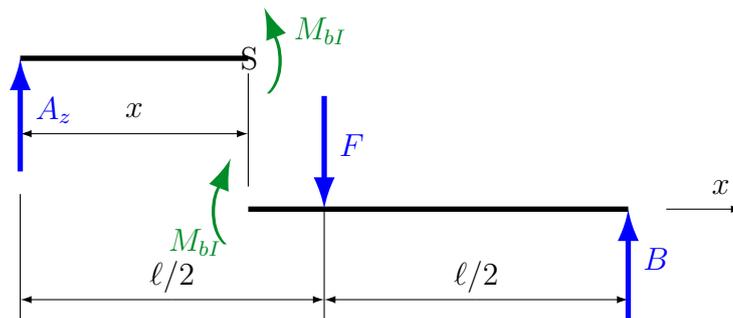
$$\sum M_{[A]} \equiv 0 = -F \frac{\ell}{2} + B \ell$$

$$A_x = 0, \quad A_z = \frac{F}{2}, \quad B = \frac{F}{2}.$$

## 2. Bereichseinteilung



## 3. a. Schneiden im Bereich I an der Stelle x

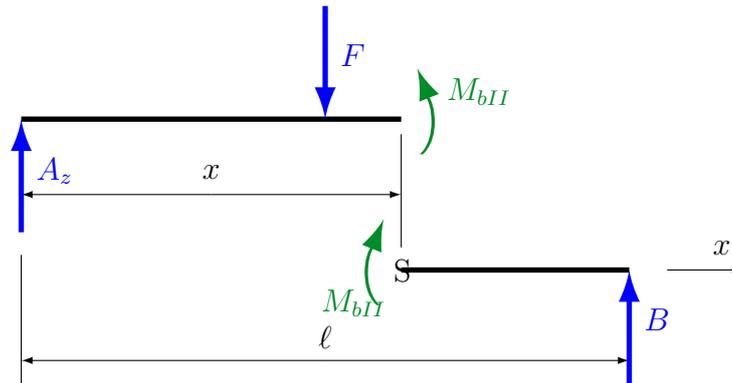


## 4. a. MG um S, hier links

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = -A_z x + M_{bI}$$

$$M_{bI} = A_z x, \quad M_{bI} = \frac{F}{2} x.$$

## 3. b Schneiden im Bereich II an der Stelle x

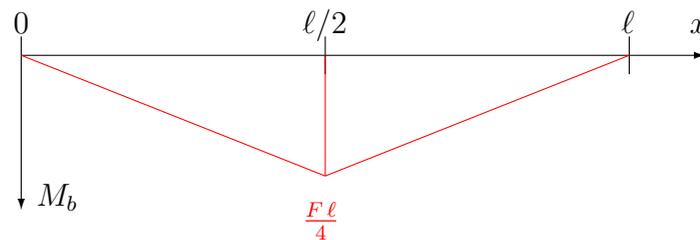


## 4. b MG um S, hier rechts

$$\sum M_{[S]} \equiv 0 = -M_{bII} + B(\ell - x)$$

$$M_{bII} = B(\ell - x), \quad M_{bII} = \frac{F}{2}(\ell - x).$$

## 5. Maximalwertsuche, graphische Darstellung



## 6. Spannungsberechnung

$$\hat{\sigma}_x = \frac{M_{b\max}}{I_y} z_{\max}$$

$$M_{b\max} = \frac{F\ell}{4}, \quad z_{\max} = \frac{b}{2}, \quad I_y = \frac{a b^3}{12}.$$

$$\hat{\sigma}_x = \frac{3 F \ell}{2 a b^2}, \quad \hat{\sigma}_x = 150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

## 7. Sicherheit gegen Fließen

$$\hat{\sigma}_x = \sigma_v < \sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_F}{s_F}$$

$$s_F < \frac{\sigma_F}{\hat{\sigma}_x}, \quad s_F < 2,07.$$

■

## 6. Axialbelastung von Stäben, elastische Stabknickung

Schlank Stäbe neigen bei axialem Druck dazu, senkrecht zur Belastungsrichtung seitlich auszuknicken.

Diese Instabilität (häufig katastrophal) erfolgt, wenn die Axiallast einen kritischen Wert  $P_{\text{krit}}$  erreicht hat. Genannt EULERSche Knicklast.  $P_{\text{krit}}$  ist abhängig von

- Stabgeometrie
- Material
- Lagerung

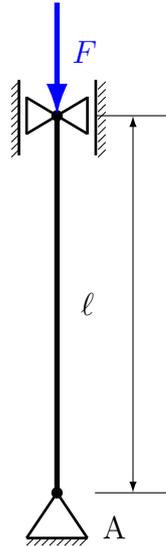
Aus der DGL der Biegelinie sind folgende Fälle ableitbar.

| EULER Fall             | 1  | 2  | 3   | 4  |
|------------------------|--|--|---|--|
| Stablänge immer $\ell$ |  |  |  |  |
| $P_{\text{krit}}$      | $= \frac{\pi^2 E \check{I}}{4 \ell^2}$   | $= \frac{\pi^2 E \check{I}}{\ell^2}$   | $\approx \frac{2 \pi^2 E \check{I}}{\ell^2}$  | $= \frac{4 \pi^2 E \check{I}}{\ell^2}$   |

Beachte bei nicht-runden Stäben: Wirksam ist das kleinste auftretende Flächenträgheitsmoment, weshalb bei der Berechnung der Knicklast  $\check{I}$  angegeben ist. ■

### 6.0.1. Übungsaufgabe, einfache Stabknickung

Ein Stab wird gemäß Skizze durch die Kraft  $F$  beansprucht. Welchen Durchmesser  $d$  muss der Stab bei zweifacher Sicherheit gegen Knicken mindestens haben?



Gegeben  $\ell = 2 \text{ m}$ ,  $F = 10,3 \text{ kN}$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $I = \frac{\pi d^4}{64}$ .

Zusatzfrage: Welcher Durchmesser ist nötig bei einer Lagerung nach EULER Fall vier?

#### Lösung

$$\text{EULER Fall zwei} \quad P_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 E I}{\ell^2}$$

$$\text{zweifache Sicherheit} \quad P_{\text{krit}} > 2 F$$

$$I \text{ eingesetzt} \quad \frac{\pi^3 E d^4}{64 \ell^2} > 2 F$$

$$\text{auflösen nach } d \quad d^4 > \frac{128 F \ell^2}{\pi^3 E}$$

$$\text{Wurzel ziehen} \quad d > \sqrt[4]{\frac{128 F \ell^2}{\pi^3 E}}$$

$$\text{Zahlenwerte} \quad d > \sqrt[4]{\frac{128 \cdot 10,3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^6}{\pi^3 \cdot 2,1 \cdot 10^5}} \text{ mm}$$

$$d > 30 \text{ mm}$$

Zustazfrage

$$\begin{array}{ll}
 \text{EULER fall vier} & P_{\text{krit}} = \frac{4 \pi^2 E I}{\ell^2} \\
 \text{Wurzel ziehen} & d > \sqrt[4]{\frac{128 F \ell^2}{4 \pi^3 E}} \\
 \text{Zahlenwerte} & d > \sqrt[4]{\frac{128 \cdot 10,3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^6}{4 \cdot \pi^3 \cdot 2,1 \cdot 10^5}} \text{ mm} \\
 & d > 21,2 \text{ mm}
 \end{array}$$

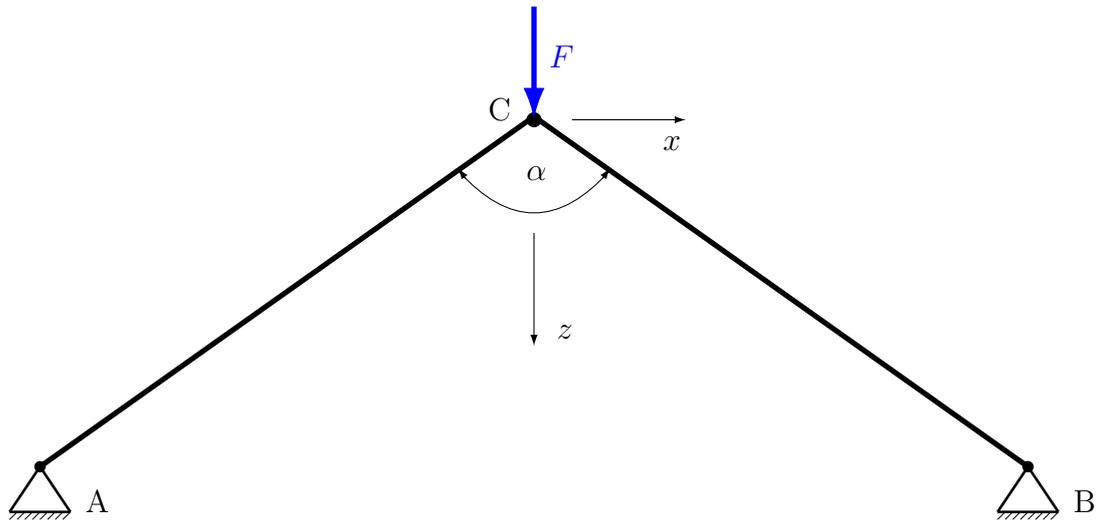
Wir sehen, die Eulersche Stabknickung selbst ist sehr einfach. Üblicherweise wird das Umfeld künstlich erschwert. Rechnen Sie mit folgenden Gemeinheiten:

- Die Stablänge ist nicht direkt angegeben, sondern über ein rechtwinkliges Dreieck zu bestimmen.
- Es gibt zwei Stäbe und nur einer wird auf Druck beansprucht.
- Es gibt zwei Stäbe, beide sind auf Druck beansprucht, einer versagt eher als der andere, weil er eine größere Axialkraft hat oder weil er länger ist.
- Die Kraft im Stab ist nicht bekannt, sondern muss mittels KG und MG bestimmt werden.

■

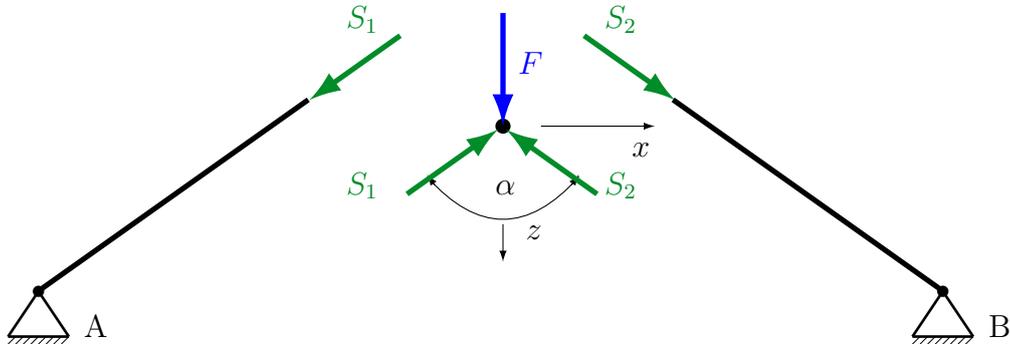
**6.0.2. Übungsaufgabe, Knickung eines Dreigelenks**

Gegeben ist das skizzierte, an drei Punkten gelenkig zusammengesetzte, symmetrische Stabwerk (Pendelstützen!). Wie groß ist die Sicherheit gegen EULERSche Stabknickung? Beachten Sie, dass beide Stäbe die Länge  $\ell$  haben.



Gegeben:  $F = 1\,000\text{ N}$ ,  $\alpha = 140^\circ$ ,  $\ell = 2\text{ m}$ ,  $\checkmark I = 7\,700\text{ mm}^4$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa}$ .

Um die Stabkräfte zu bestimmen, müssen wir uns an die Anfänge des ersten Semester erinnern. Wir haben ein zentrales Kräftesystem.



$$\begin{aligned} \text{Kräftegleichgewichte} \quad \sum X \equiv 0 &= S_1 \sin \frac{\alpha}{2} - S_2 \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sum Z \equiv 0 &= F - S_1 \cos \frac{\alpha}{2} - S_2 \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\text{aus KG in } x\text{-Richtung folgt} \quad S_1 = S_2$$

$$\text{aus KG in } z\text{-Richtung folgt} \quad F = 2 S_1 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{bzw.} \quad S_1 = \frac{F}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Kontrolle mit Zahlenwerten} \quad S_1 = S_2 = 1462 \text{ N}$$

$$\text{EULER Fall zwei} \quad P_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 E \check{I}}{\ell^2}$$

$$\text{Kontrolle mit Zahlenwerten} \quad P_{\text{krit}} = 3990 \text{ N}$$

$$\text{Sicherheit gegen Knicken} \quad s_k < \frac{P_{\text{krit}}}{S_1} = \frac{2 \pi^2 E \check{I} \cos \frac{\alpha}{2}}{\ell^2 F}$$

$$\text{Zahlenwerte} \quad s_k < \frac{2 \pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 7700 \cdot \cos 70^\circ}{2000^2 \cdot 1000}$$

$$\text{Sicherheit gegen Knicken} \quad s_k < 2,73$$

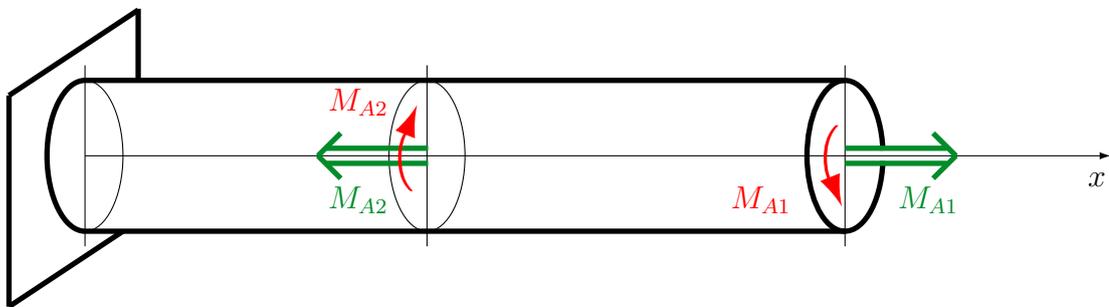
Diese Aufgabe war einmal Klausuraufgabe, sie war etwas zu leicht. Rechnen Sie damit, dass die Stäbe nicht gleich lang sind und dass nicht beide Stäbe auf Druck beansprucht werden. ■

## 7. Torsion einer Welle mit Kreis(ring)querschnitt

Sie werden sehen, dass Torsion viel einfacher als Biegung ist. Die Gründe sind:

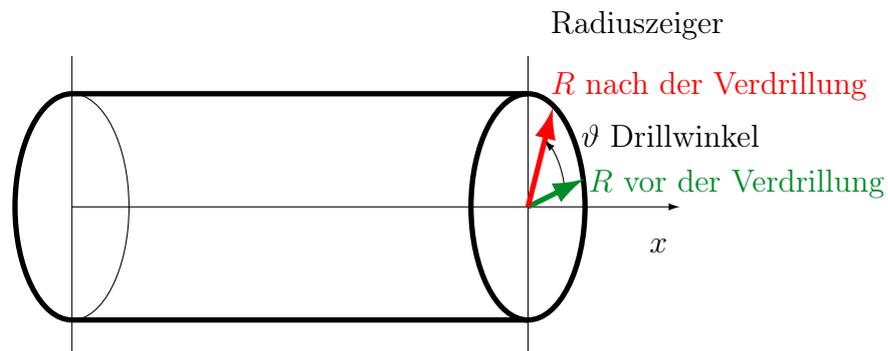
- nur eine Beanspruchungsgröße: Torsionsmoment  $M_t$ ,
- nur eine Spannung: Schubspannung  $\tau$ ,
- es gibt wieder Verformung: Drillwinkel  $\vartheta$  (theta),
- ja, es gibt hierfür wieder eine DGL, sie ist jedoch von erster Ordnung, daher nur eine Konstante.

Eine Welle (Eigengewicht vernachlässigbar oder durch Lager aufgefangen) sei beliebig durch äußere Torsionsmomente  $M_{Ai}$  ( $i = 1 \dots N$ ) belastet. Die zugehörigen Momentenvektoren liegen in Wellenlängsrichtung.



Künftig werden wir statt der gekrümmten Pfeile lieber Doppelpfeile in oder gegen  $x$ -Richtung verwenden.

Es gibt an jeder Stelle  $x$  der Welle einen Schnittmomentenvektor  $\vec{M}_t(x)$ , der in der  $x$ -Ache liegt. Die Welle wird daraufhin verdrillt.



Den Drillwinkel  $\vartheta$  können wir sehen, wenn wir auf der Stirnfläche der Welle eine Markierung anbringen, z.B. einen Radiuszeiger. Dann lassen wir die äußeren Torsionsmomente  $M_A$  wirken, woraufhin der Radiuszeiger in eine andere Richtung zeigt. Der eingeschlossene Winkel ist der Drillwinkel. Wir müssen grundsätzlich in Bogenmaß rechnen.

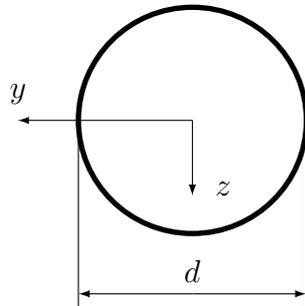
Wie groß kann  $\vartheta$  werden? Da ist alles denkbar. Verschwindend kleine Bogenmaße, also Bruchteile eines Grads sind denkbar. In der Tiefbohrtechnik gibt es hingegen Fälle, in denen auf dem Bohrtisch der Bohrantrieb zehn volle Umdrehungen macht, bevor 1000 m tiefer der Bohrmeißel sich in Bewegung setzt. Das macht das Tiefbohrgeschäft so gefährlich. Wenn die Koppelung zwischen Antrieb und Gestänge nachgibt, entladen sich diese zehn Umdrehungen. Das Bohrgestänge, das im ungünstigen Fall bis hoch in den Bohrturm reicht, schlägt dabei alles kurz und klein.

### 7.1. Polares Flächenträgheitsmoment

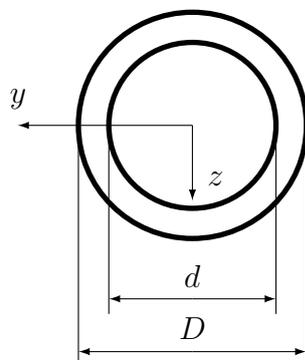
Es folgt ein kurzer Einschub für einen Parameter, der beschreibt, wie sich die Welle gegen ein Verdrillen wehrt.

Der Grad der Verdrillung ist auch vom Wellenquerschnitt und seiner Gestaltung abhängig. Analog zu den Flächenträgheitsmomenten der Balkenbiegung wird ein polares Flächenträgheitsmoment der Torsion  $I_0$  eingeführt.

Beispiele:



Vollwelle  $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$



Hohlwelle  $I_0 = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$

**Übrigens**

Es gilt:

$$I_0 = I_y + I_z$$

mit  $I_y$  und  $I_z$ : die bekannten Flächenträgheitsmomente der Biegung. ■

**7.1.1. Übung, Propellerwelle**

Eine Propellerwelle wird hohlgebohrt mit  $d_a = 0,6$  m,  $d_i = 0,4$  m. Gesucht ist:

- polares Flächenträgheitsmoment der Vollwelle (Außendurchmesser  $d_a$ ),
- polares FTM der Hohlwelle (Außendurchmesser  $d_a$ , Innendurchmesser  $d_i$ ),
- prozentuale Verringerung des polaren FTM durch Aufbohren,
- prozentuale Massenverringerng durch Aufbohren.

Es gilt:

$$\text{Vollwelle} \quad I_0 = \frac{\pi d_a^4}{32}, \quad \text{Hohlwelle} \quad I_0 = \frac{\pi (d_a^4 - d_i^4)}{32}$$

a)

$$I_{0\text{voll}} = \frac{\pi \cdot 0,6^4}{32} \text{ m}^4$$

$$I_{0\text{voll}} = 1,27 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

b)

$$I_{0\text{hohl}} = \frac{\pi (0,6^4 - 0,4^4)}{32} \text{ m}^4$$

$$I_{0\text{hohl}} = 1,02 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

c)

$$\Delta I_0 = \frac{I_{0\text{voll}} - I_{0\text{hohl}}}{I_{0\text{voll}}} = 0,2 \quad \text{oder} \quad 20\%$$

- d) Der Massenunterschied entspricht dem Unterschied der Volumina  $V$  und auch dem der Querschnittsflächen  $A$ , da beide Wellen gleich lang sind.

$$\Delta m = \frac{m_{\text{voll}} - m_{\text{hohl}}}{m_{\text{voll}}} = \frac{V_{\text{voll}} - V_{\text{hohl}}}{V_{\text{voll}}} = \frac{A_{\text{voll}} - A_{\text{hohl}}}{A_{\text{voll}}}$$

$$A_{\text{voll}} = \frac{\pi}{4} d_a^2, \quad A_{\text{hohl}} = \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2)$$

$$\Delta m = \frac{\frac{\pi}{4} d_a^2 - \left[ \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) \right]}{\frac{\pi}{4} d_a^2}$$
$$\Delta m = \frac{d_a^2 - d_a^2 + d_i^2}{d_a^2} = \frac{d_i^2}{d_a^2}$$
$$\Delta m = \frac{0,4^2}{0,6^2} = 0,44 \text{ oder } 44\%$$

Bei Leichtbau sollten hohle Wellen verwendet werden.



## 7.2. Differentialgleichung der Torsion

Eine längere Herleitung liefert für die Torsion (Drillung) einer Welle

$$(II.19) \quad I_0 G \frac{d\vartheta}{dx} = +M_t(x)$$

$I_0$ : polares Flächenträgheitsmoment

$G$ : Schubmodul,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$\vartheta(x)$ : Drillwinkel an der Stelle  $x$

$M_t(x)$ : Torsionsmoment in der Welle an der Stelle  $x$

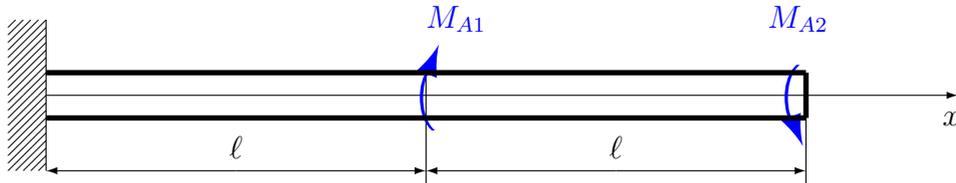
häufig abgekürzt

$$I_0 G \vartheta' = +M_t(x)$$



### 7.2.1. Übung: Drillwinkelverlauf, zwei Bereiche

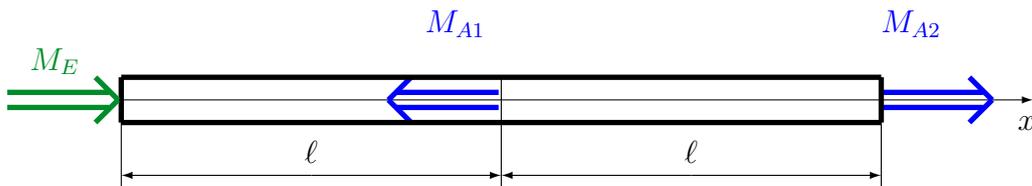
Ein einseitig eingespannter Torsionsstab wird durch zwei Momente belastet. Wie wird der Stab verdrillt?



Gegeben:  $\ell$ ,  $I_0$ ,  $G$ ,  $M_{A1}$ ,  $M_{A2}$ . Gesucht: Verlauf des Drillwinkels  $\vartheta$ .

Es erscheinen doch noch einmal gekrümmte Pfeile als Symbol für äußere Torsionsmomente. Wir werden sie gleich durch Doppelpfeile ersetzen.

1. Lagerreaktionen

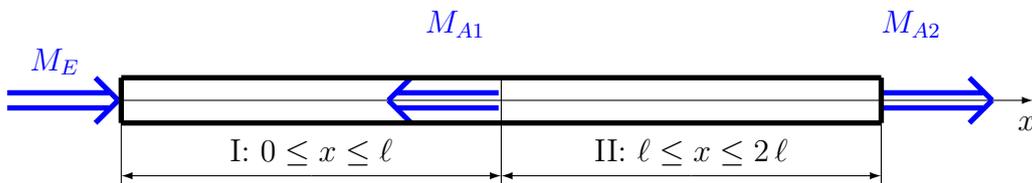


$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = M_E - M_{A1} + M_{A2}$$

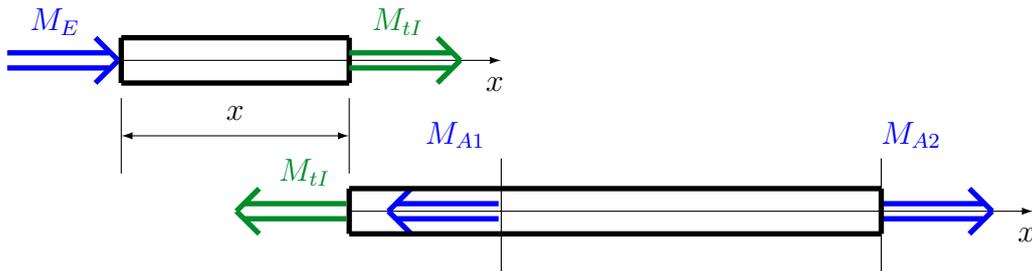
$$M_E = M_{A1} - M_{A2}$$

$M_E$  wie Einspannmoment

2. Bereichsteilung



3. a) Schneiden im Bereich I

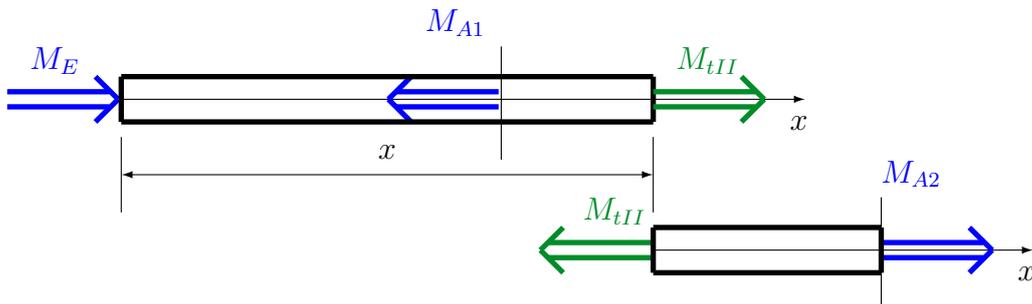


4. a) MG um  $x$  hier rechts

$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = -M_{tI} - M_{A1} + M_{A2}$$

$$M_{tI} = M_{A2} - M_{A1}$$

3. b) Schneiden im Bereich II



4. b) MG um  $x$  hier rechts

$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = -M_{tII} + M_{A2}$$

$$M_{tII} = M_{A2}$$

## 5. DGL der Torsion

$$\begin{array}{ll}
 G I_0 \vartheta'_I = M_{tI} & G I_0 \vartheta'_{II} = M_{tII} \\
 G I_0 \vartheta'_I = M_{A2} - M_{A1} & G I_0 \vartheta'_{II} = M_{A2} \\
 G I_0 \vartheta_I = M_{A2} x - M_{A1} x + c_1 & G I_0 \vartheta_{II} = M_{A2} x + c_2
 \end{array}$$

## 6. Rand- und Übergangsbedingungen

Links außen bei  $x = 0$  haben wir eine feste Einspannung. An der Bereichsgrenze bei  $x = \ell$  haben wir einen stetigen Übergang von Bereich I zu Bereich II. Wir stellen fest:

$$(1) \quad \vartheta_I(x = 0) = 0, \quad (2) \quad \vartheta_I(x = \ell) = \vartheta_{II}(x = \ell)$$

Die Bedingung (1) ist vom Typ Doppelnul und liefert

$$c_1 = 0$$

Die Bedingung (2) wird in die integrierten Gleichungen eingesetzt. Dabei setzen wir  $G I_0 \vartheta_I(x = \ell)$  mit  $G I_0 \vartheta_{II}(x = \ell)$  gleich. Wir nehmen also die rechten Seiten und ersetzen  $x$  durch  $\ell$

$$\begin{aligned}
 M_{A2} \ell - M_{A1} \ell &= M_{A2} \ell + c_2 \\
 c_2 &= -M_{A1} \ell
 \end{aligned}$$

## 7. Anschreiben der Drillwinkelverläufe

$$\begin{aligned}
 \vartheta_I &= \frac{1}{G I_0} [M_{A2} x - M_{A1} x] \\
 \vartheta_{II} &= \frac{1}{G I_0} [M_{A2} x - M_{A1} \ell]
 \end{aligned}$$

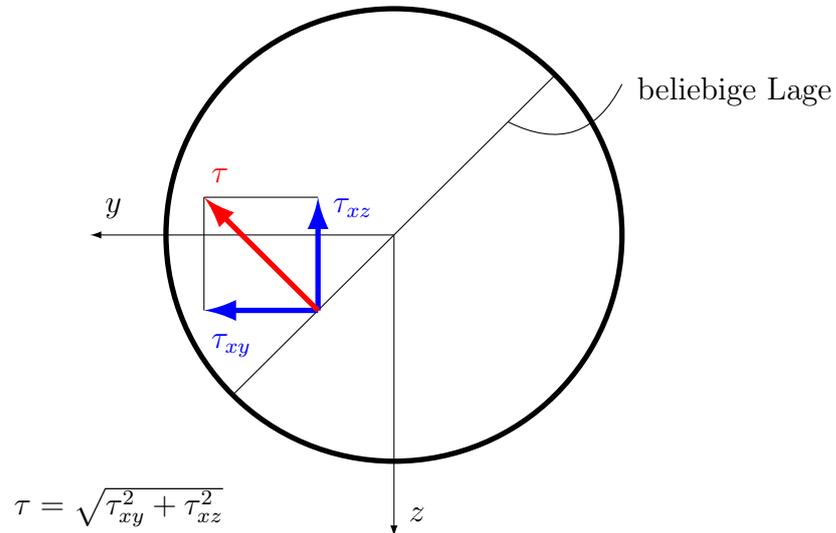
Wir sehen, Torsion ist erheblich einfacher. Vergleichen Sie das mit der Berechnung eines Biegebalkens mit zwei Bereichen. ■

### 7.3. Spannung an der tordierten Welle

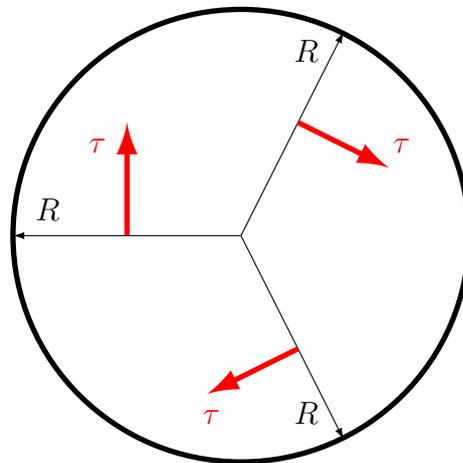
Ohne Beweis: Es treten ausschließlich folgende Schubspannungen auf

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \text{und} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Diese können zu einer einzigen zusammengefasst werden

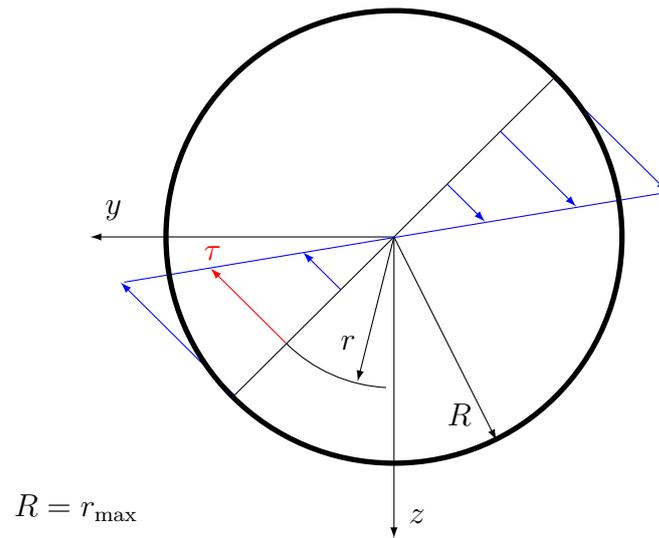


Die Schubspannungen  $\tau$  stehen immer senkrecht auf einem beliebigen Radiuszeiger.



Berechnung der Schubspannung  $\tau$ :

$$(II.20) \quad \tau = \frac{M_t(x)}{I_0} r$$



Die größte auftretende Schubspannung ist demzufolge

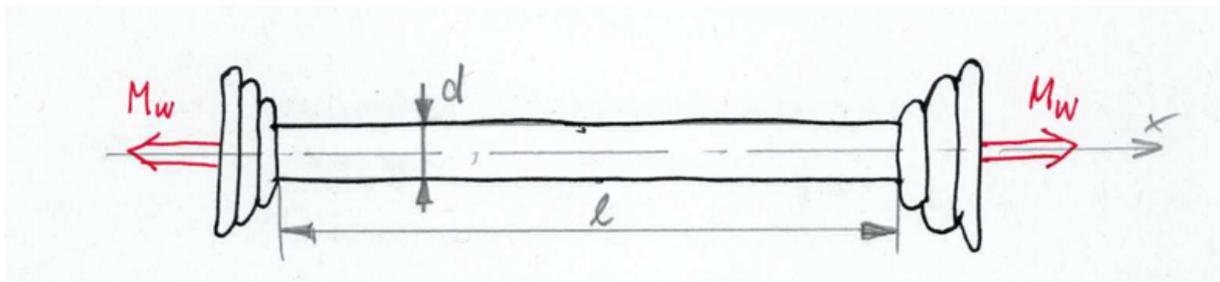
$$\tau = \frac{M_{t\max}}{I_0} R$$

■

### 7.3.1. Übungsaufgabe, Gelenkwelle eines Autos

Ein Pkw wird im 1. Gang rasant angefahren. Der Motor entwickelt sein Maximalmoment  $M_M = 160 \text{ Nm}$ . Berechnen Sie unter Berücksichtigung

- aller Übersetzungsverhältnisse
  - des Vorhandenseins eines Differentialgetriebes
- a) das in einer Gelenkwelle wirkende Torsionsmoment  $M_W$ ,
  - b) den maximalen Drillwinkel  $\vartheta$ ,
  - c) die maximal auftretende Schubspannung  $\tau$
  - d) Zugfestigkeit bei 1,2-facher Sicherheit gegen Bruch nach TRESCA



Gegeben  $i_{1. \text{ Gang}} = 3,65$ ,  $i_{\text{Achsantrieb}} = 3,89$ ,  $l = 400 \text{ mm}$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $d = 25 \text{ mm}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $M_M = 160 \text{ Nm}$

Die Zahlenwerte sind realistisch, wenn auch nicht mehr aktuell. Sie entstammen meinem ersten selbst bezahlten Auto, einem Golf II von 1986 mit 66 kW (90 PS).

Betrachten wir kurz den Antriebsstrang eines Autos und die Wirkung von Zahnradgetrieben. Der Motor erzeugt ein Drehmoment. In unserem Sinne ist es ein Torsionsmoment an der Kurbelwelle. Ob sich eine Welle dreht oder sie festgehalten wird, ist uns herzlich egal, aus TM-Sicht macht das keinen Unterschied. Die Kupplung stellt das anliegende Motormoment unverändert ans Getriebe durch. Im Getriebe ist der 1. Gang gewählt mit einem Übersetzungsverhältnis  $i = 3,65$ . Das bedeutet, dass die Drehzahl um den Faktor 3,65 kleiner wird und das Torsionsmoment um den gleichen Faktor größer wird (über Verluste wollen wir nicht streiten, sie sind bei Stirnradgetrieben sehr gering).

Die Getriebeausgangswelle treibt den Achsantrieb an. Bei einem klassischen Nord-Süd-Auto (Motor vorn, Kardanwelle, Hinterachsantrieb) ist der Achsantrieb als Kegelradsatz im Differentialgetriebe untergebracht. Bei meinem Golf mit Quermotor und Vorderrad-antrieb war das ein weiteres Stirnradpaar. Es hat das Übersetzungsverhältnis  $i = 3,89$ .

Das Differentialgetriebe verteilt das Eingangsmoment gerecht auf die beiden Gelenkwellen, die die Räder antreiben. Bei Geradeausfahrt wird das Eingangsmoment hälftig aufgeteilt. Jetzt wissen wir bescheid.

a) Das Torsionsmoment in einer Gelenkwelle berechnet sich zu

$$M_W = M_M \cdot i_{1. \text{ Gang}} \cdot i_{\text{Achsantrieb}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$M_W = 1\,136 \text{ Nm}$$

b) Maximaler Drillwinkel  $\vartheta$

Zunächst bestimmen wir einige Hilfsgrößen

|            |                                   |
|------------|-----------------------------------|
| Schubmodul | $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$          |
|            | $G = 8,08 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ |

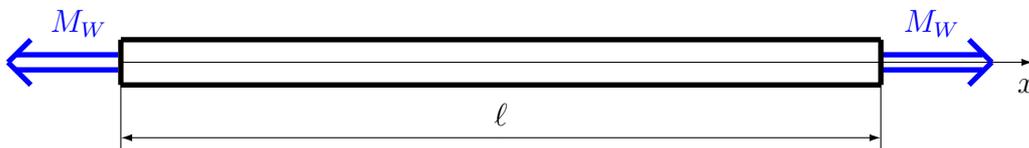
|                                |                                      |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| polares Flächenträgheitsmoment | $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$           |
|                                | $I_0 = 3,83 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ |

Die polaren Flächenträgheitsmomente für Voll- und Hohlwellen gehören auf Ihren legalen Pfuschzettel ( $I_y$ , die axialen FTMe, natürlich auch)!

Nun beginnt die Berechnung der Drillwinkel:

1. Lagerreaktionen.

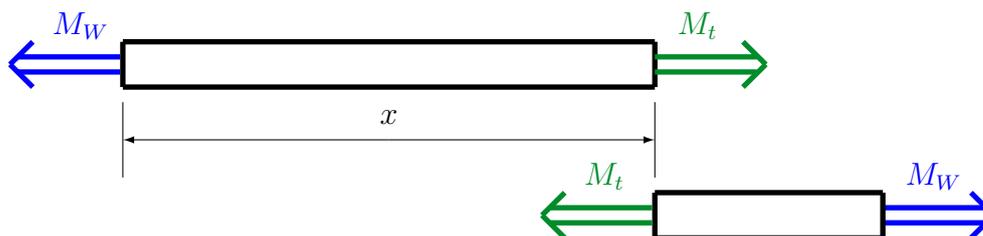
Wir haben doch gar keine feste Einspannung. Egal die Welle hat an beiden Enden das gleiche aber entgegengesetzte Torsionsmoment  $M_W$ .



2. Bereichseinteilung

Nur ein Bereich  $0 \leq x \leq \ell$ .

## 3. Schneiden im Bereich

4. MG um  $x$  hier links

$$\sum M_{[x]} \equiv 0 = M_t - M_W$$

$$M_t = M_W$$

## 5. DGL der Torsion

$$G I_0 \vartheta' = M_t$$

$$G I_0 \vartheta' = M_W$$

$$G I_0 \vartheta = M_W x + c_1$$

## 6. Rand- und Übergangsbedingungen

Da wir eine umlaufende Welle haben, fällt es uns zunächst schwer, an den Rändern Aussagen zu treffen. Die Lösung ist ganz einfach. Wir nehmen einen Rand, der uns gefällt und definieren einfach, dass die Verdrillung dort Null ist. Da wir nicht blöd sind, nehmen wir natürlich den Rand an der Stelle  $x = 0$ .

Es gilt willkürlich

$$\vartheta(x = 0) = 0, \quad c_1 = 0$$

## 7. Anschreiben des Drillwinkelverlaufs und Angabe des maximalen Drillwinkels.

Am linken Rand haben wir die Verdrillung willkürlich aber geschickt auf Null gesetzt. Den maximalen Drillwinkel finden wir demzufolge am rechten Rand bei  $x = \ell$ .

$$\vartheta = \frac{M_W x}{G I_0}$$

$$\vartheta_{\max} = \vartheta(x = \ell) = \frac{M_W \ell}{G I_0}$$

$$\vartheta_{\max} = 0,147$$

Drillwinkel ergeben sich immer im Bogenmaß. 0,147 entsprechen  $8,42^\circ$

c) Maximale Schubspannung

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t\max}}{I_0} r_{\max}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1\,136 \cdot 10^3}{3,83 \cdot 10^4} 12,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\max} = 371 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Es ist ganz typisch, dass das Torsionsmoment in einer Welle einen konstanten Verlauf hat. Die Suche nach dem Maximum ist also müßig. Wie können – anders als beim Balken – nicht vorhersagen wo eine Welle zerstört wird, wenn sie überlastet wird.

d) Dimensionierung nach TRESKA gegen Bruch

Hier taucht die einzige Erschwernis bei Torsion gegenüber Biegung auf. Wir haben zwar nur eine Spannung  $\tau$ , wir dürfen sie aber auf gar keinen Fall mit Werkstoffkennwerten vergleichen. Das dürfen wir nur bei einachsigem Zug oder Druck. Wir haben hingegen Torsion und werden gleich unser blaues Wunder erleben.

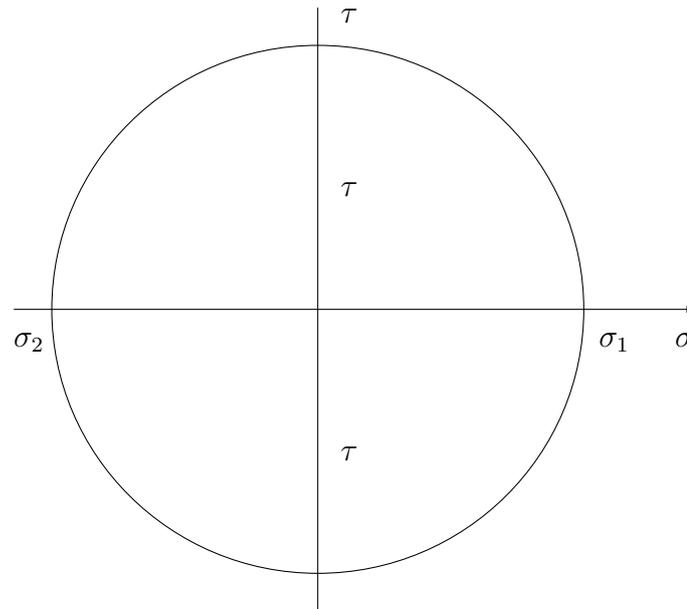
Vergleichsspannungshypothese nach TRESKA

$$\sigma_v = \max \left[ |\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_1 - \sigma_3| \right]$$

Bestimmung der Hauptspannungen  $\sigma_{123}$  z. B. mit Hilfe des MOHRschen Kreises. Hierbei gilt  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ . Es gibt lediglich eine Schubspannung  $\tau = 371 \text{ MPa}$ .

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es herrscht also ein ebener Spannungszustand.



$$\sigma_1 = +371 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_2 = -371 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_v = \max \left[ 742; 371; 371 \right] \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$$\sigma_v = 742 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

$$\sigma_B > s_B \sigma_v$$

$$\sigma_B > 1,2 \cdot 742 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_B > 890,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Wir benötigen demzufolge einen Werkstoff mit einer Zugfestigkeit von über 890 MPa. Tatsächlich sind die Gelenkwellen sehr hoch beanspruchte Bauteile. Es kommt durchaus vor, dass ein Krawallstart zu plastischen Verformungen in der Welle führt. Mal ganz ehrlich, nur Idioten posen und lassen die Reifen quietschen.

Erinnern Sie sich noch an unsere erste Vorlesung, als ich morsche Hölzer zerbrochen habe? Biegung und Torsion fordern das Material. Bei reiner Torsion ist es immer so, dass die doppelte Schubspannung mit Werkstoffkennwerten verglichen werden muss.

■

## 7.4. Analogie Torsion – Biegung

| Balkenbiegung  | Torsion   |
|--|---|
| $I_y E w'' = -M_b(x)$  | $I_0 G \vartheta' = +M_t(x)$                    |
| $\sigma_x = \frac{M_b(x)}{I_y} z$  | $\tau_{x\varphi} = \tau = \frac{M_t(x)}{I_0} r$ |
| $ \sigma_{x\max}  = \frac{ M_{b\max} }{I_y}  z_{\max} $                      | $ \tau_{\max}  = \frac{ M_{t\max} }{I_0} R$     |
| $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Q}{2 I_y} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)$ | keine weitere Spannung                          |



# Teil III.

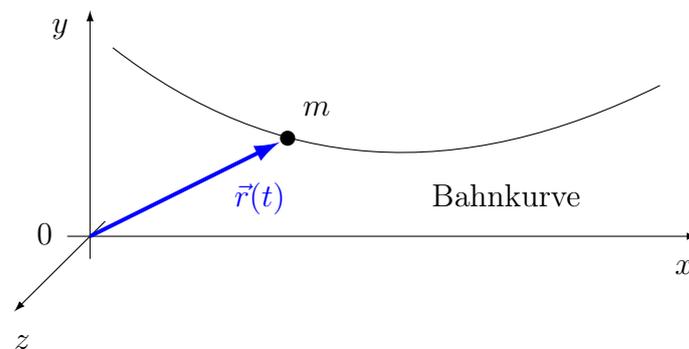
## Dynamik

### 1. Kinematik

Die Kinematik ist die Lehre von der Bewegung, ohne nach Ursachen zu fragen.

#### 1.1. Lage

Die Lage oder Position eines Massenpunktes ist durch seinen Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  gegeben.

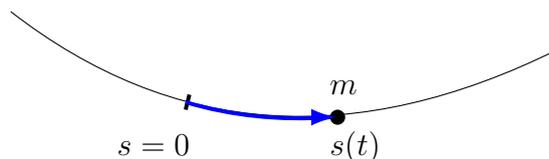


Ein Massenpunkt fährt entlang einer Bahnkurve. Dies kann wie bei einer Achterbahn eine Schienenbahn sein, es kann aber auch eine sich von allein einstellende Wurfbahn sein, die dann natürlich anders aussehen müsste.

$$(III.1) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Ortsvektor  $\vec{r}$  und Komponenten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sind naturgemäß zeitabhängig.

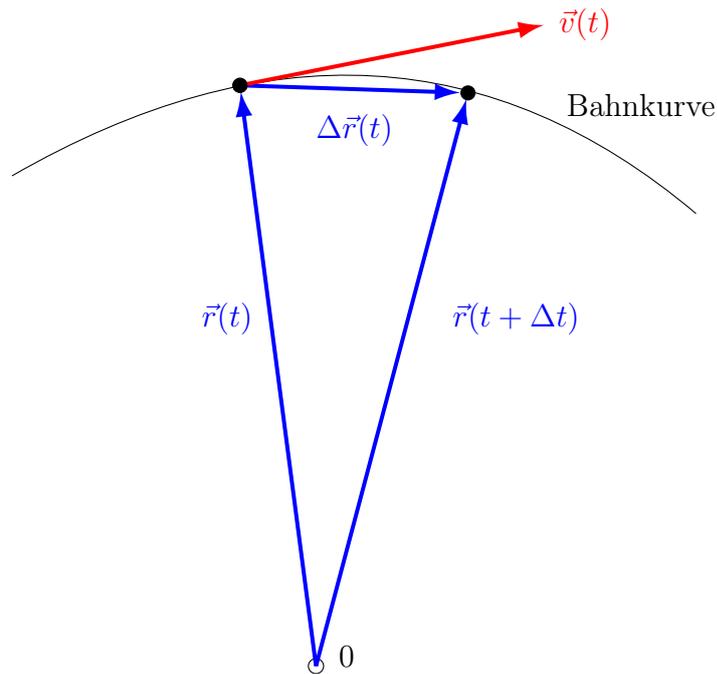
Bei vorgegebener Bahnkurve kann die Lage auch als Bogenlänge  $s$  (wie Strecke) angegeben werden.



$\dim [\vec{r}, x, y, z, s] = \text{Länge}, \quad \text{Einheit: m}$

## 1.2. Geschwindigkeit

Wir betrachten zwei Momentaufnahmen. Der Massenpunkt ist zum Zeitpunkt  $t$  an einer Position, beschrieben durch den Ortsvektor  $\vec{r}(t)$ . Eine kurze Zeit  $\Delta t$  später ist er auf seiner Bahnkurve vorangekommen. Seine Lage wird jetzt beschrieben durch den neuen Ortsvektor  $\vec{r}(t + \Delta t)$ .



Der Vektor  $\Delta\vec{r}(t)$  beschreibt das Vorankommen „in Luftlinie“. Es gilt  $\vec{r}(t) + \Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t)$

Auch die Geschwindigkeit wird vektoriell angetragen.

Wenn der Zeitunterschied  $\Delta t$  sehr kurz gewählt wird, dann gleichen sich die Richtungen von  $\Delta\vec{r}(t)$  und  $\vec{v}(t)$  an.

$$(III.2) \quad \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

oder betragsmäßig bei festliegender Bahnstrecke

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$\dim [\vec{v}, v] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}, \quad \text{Einheit: } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  tangiert überall die Bahnkurve. Beispiel eines Geschwindigkeitsvektors

$$(III.3) \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}$$

Spezialfälle

- $\vec{v}(t)$  habe konstante Richtung: Bewegung auf einer Geraden,
- $v(t) = |\vec{v}(t)| = \text{const.}$ : Gleichförmige Bewegung, auch auf einer krummen Bahn.

### 1.3. Beschleunigung

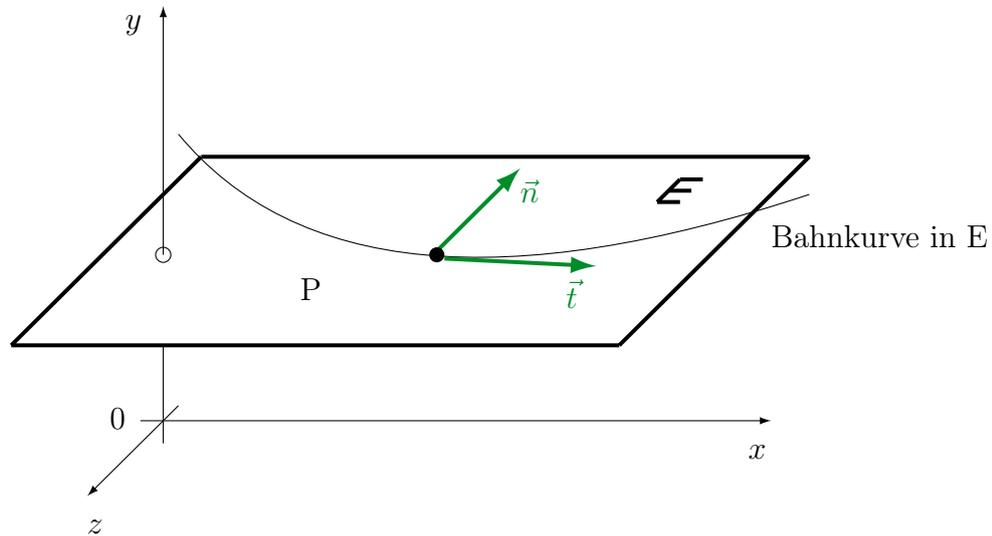
$$(III.4) \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$(III.5) \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

$$\dim [\vec{a}, a] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}^2}, \quad \text{Einheit: } \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Spezialfälle

- $\vec{a} = \vec{0}$ : Wenn  $\vec{v} = \text{const.}$  nach Betrag und Richtung, dann ist die Bewegung immer geradlinig und gleichförmig.
- Ebene Bewegung:



Einführung von Einheitsvektoren  $\vec{t}$  und  $\vec{n}$ . Zur Erinnerung, Einheitsvektoren sind Richtungszeiger der Länge 1.

$\vec{t}$  Tangente zur Bahnkurve in E

$\vec{n} \perp \vec{t}$  in E als Normalenvektor

Man kann herleiten, dass der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$  bei ebenen Bewegungen aus maximal zwei additiven Anteilen besteht.

$$(III.6) \quad \vec{a} = \dot{v} \cdot \vec{t} + \frac{v^2}{\varrho} \cdot \vec{n},$$

mit  $\varrho$ : momentaner Krümmungsradius der Bahnkurve. Hierbei wird

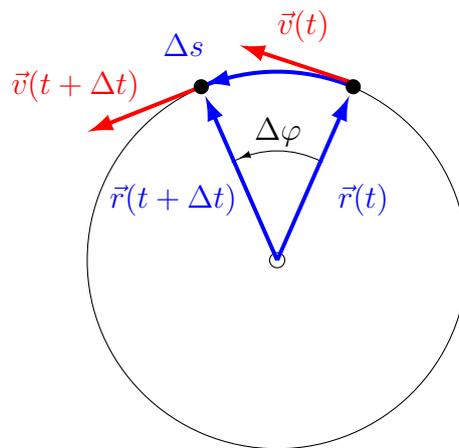
$\dot{v} \cdot \vec{t} = \vec{a}_t$  Tangentialbeschleunigung oder Bahnbeschleunigung und

$\frac{v^2}{\varrho} \cdot \vec{n} = \vec{a}_n$  Normal- oder Zentripetalbeschleunigung genannt.

Letztere ist immer auf den Krümmungsmittelpunkt gerichtet.

Zentripetalbeschleunigung mag sich seltsam anhören. Im allgemeinen Sprachgebrauch sind Zentrifugalbeschleunigungen bekannt. Letztere spüren wir ausschließlich im bewegten System (im Auto, im Karussell). Bei Kurvenfahrt werden wir nach außen gedrückt. Von außen betrachtet, also im ruhenden System, gibt es die Zentripetalbeschleunigung, die das Auto zum Kurvenmittelpunkt hin beschleunigt und so auf der Bahnkurve hält.

- Bewegung auf einer Kreisbahn.



$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \frac{r \cdot d\varphi}{dt}$$

Der Zusammenhang  $\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$  bzw.  $ds = r \cdot d\varphi$  ist leicht über den Umfang eines Kreises nachvollziehbar:  $U = r \cdot 2\pi$ .

Wir kürzen ab:

$$v = r\omega$$

mit  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  Winkelgeschwindigkeit

$$\dim[\omega] = \frac{1}{\text{Zeit}}, \quad \text{Einheit: } \frac{1}{\text{s}} \quad \text{nicht Hz}$$

Analog zur Winkelgeschwindigkeit wird die Winkelbeschleunigung eingeführt

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad \dim[\alpha, \dot{\omega}, \ddot{\varphi}] = \frac{1}{\text{Zeit}^2}, \quad \text{Einheit: } \frac{1}{\text{s}^2}$$

Für Kreisbahnen gilt

$$(III.7) \quad a_t = \dot{v} = r\dot{\omega} = r\ddot{\varphi}$$

$$(III.8) \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

## Ausflug

Angaben von Geschwindigkeiten auf Kreisbahnen

|                       |          |  |                        |
|-----------------------|----------|--|------------------------|
| Drehzahl              | $n$      | $\frac{\text{U}}{\text{min}}$                      | Ereignisse pro Minute  |
| Drehfrequenz          | $f$      | $\frac{\text{U}}{\text{s}} = \text{Hz}$            | Ereignisse pro Sekunde |
| Winkelgeschwindigkeit | $\omega$ | $\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$ | Bogenmaß pro Sekunde   |

$$(III.9) \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx \frac{n}{10}.$$



### 1.3.0. Übung, Vorbemerkung zur Kinematik

Bekannt ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v; & \ddot{x} &= \dot{v} = a \\ \frac{dx}{dt} &= v; & \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} = a \end{aligned}$$

Vorgehensweise, wenn bei bekannter Beschleunigung Wege  $s$  bzw.  $x$  oder Geschwindigkeiten  $v$  bzw.  $\dot{x}$  gesucht sind: Integrieren.

$$v = \int a \, dt = \int \ddot{x} \, dt = \dot{x}$$

$$x = \int v \, dt = \int \dot{x} \, dt$$

Typische Integration:  $a = \text{const}$

$$v = \dot{x} = \int a \, dt = at + c_1$$

$$x = \int v \, dt = \int (at + c_1) \, dt = \frac{a}{2} t^2 + c_1 t + c_2$$

Die Integrationskonstanten  $c_1$  und  $c_2$  werden durch Anfangsbedingungen bestimmt. ■

### 1.3.1. Übung, Spurt von Null auf 100

Ein Auto beschleunigt mit einer konstanten Beschleunigung von  $a = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Wie lange dauert der Spurt von 0 auf  $v_E = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ? Welcher Weg  $d$  wird dabei zurückgelegt?

#### Lösung

$$\begin{array}{ll} & \ddot{x} = a = \text{const.} \\ & \\ & \text{2 mal integrieren} \quad \dot{x} = a t + c_1 \\ & \quad \quad \quad x = \frac{a}{2} t^2 + c_1 t + c_2 \\ & \text{Anfangsbedingungen AB1} \quad \dot{x}(t=0) = 0 \\ & \quad \quad \quad \text{AB2} \quad x(t=0) = 0 \\ & \text{Konstanten bestimmen} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0 \\ & \text{tatsächliche Bewegungsgleichungen} \quad \dot{x} = a t \\ & \quad \quad \quad x = \frac{a}{2} t^2 \\ & \text{Endbedingungen EB1} \quad \dot{x}(t=T) = v_E \\ & \quad \quad \quad \text{EB2} \quad x(t=T) = d = ? \\ & \text{Zeit } T \text{ bestimmen (hier EB1)} \quad T = \frac{v_E}{a} \\ & \quad \quad \quad T = \frac{28 \text{ m}}{2,4 \text{ s}} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}} = 11,7 \text{ s} \\ & \text{gesuchte Größe bestimmen (hier EB2)} \quad d = \frac{a}{2} T^2 = \frac{a}{2} \frac{v_E^2}{a^2} = \frac{v_E^2}{2 a} \\ & \quad \quad \quad d = \frac{28^2}{2 \cdot 2,4} \frac{\text{m}^2 \text{ s}^2}{\text{s}^2 \text{ m}} = 164 \text{ m} \end{array}$$

Anfangsbedingungen vom Typ „Doppelnul“ führen wie bei der Balkenbiegung (dort sprachen wir von Randbedingungen) zu Konstanten, die Null sind.

Dieses Rechenschema wird in Zukunft immer wieder auftauchen. Es wird sehr verblüffend sein, dass es völlig unerheblich ist, welche Größen gegeben und welche gesucht sind; die Vorgehensweise ist immer gleich. ■

### 1.3.2. Übung, Massenpunkt auf Kreisbahn

Ein Massenpunkt bewegt sich mit der konstanten Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$ . Zur Zeit  $t = 0$  gilt  $\dot{\varphi}(t = 0) = \omega_0$  und  $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ . Wie groß muss  $\ddot{\varphi}$  sein, damit der Massenpunkt nach einem Umlauf ( $2\pi$ ) zum Stillstand kommt?

#### Lösung

$$\ddot{\varphi} = \alpha = \text{const.}$$

$$2 \text{ mal int.} \quad \dot{\varphi} = \alpha t + c_1$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\text{AB1} \quad \dot{\varphi}(t = 0) = \omega_0$$

$$\text{AB2} \quad \varphi(t = 0) = \varphi_0$$

$$c_{1,2} \text{ best.} \quad c_1 = \omega_0, \quad c_2 = \varphi_0$$

$$\text{tats. BewGl.} \quad \dot{\varphi} = \alpha t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

$$\text{EB1} \quad \dot{\varphi}(t = T) = 0$$

$$\text{EB2} \quad \varphi(t = T) = \varphi_0 + 2\pi$$

$$T \text{ best. (hier EB1)} \quad 0 = \alpha T + \omega_0$$

$$T = -\frac{\omega_0}{\alpha}$$

$$\text{hier ist } \alpha \text{ gesucht, EB2} \quad \varphi_0 + 2\pi = \frac{\alpha}{2} T^2 + \omega_0 T + \varphi_0$$

$$2\pi = \frac{\alpha}{2} \frac{\omega_0^2}{\alpha^2} - \omega_0 \frac{\omega_0}{\alpha}$$

$$2\pi = \frac{\omega_0^2 - 2\omega_0^2}{2\alpha}$$

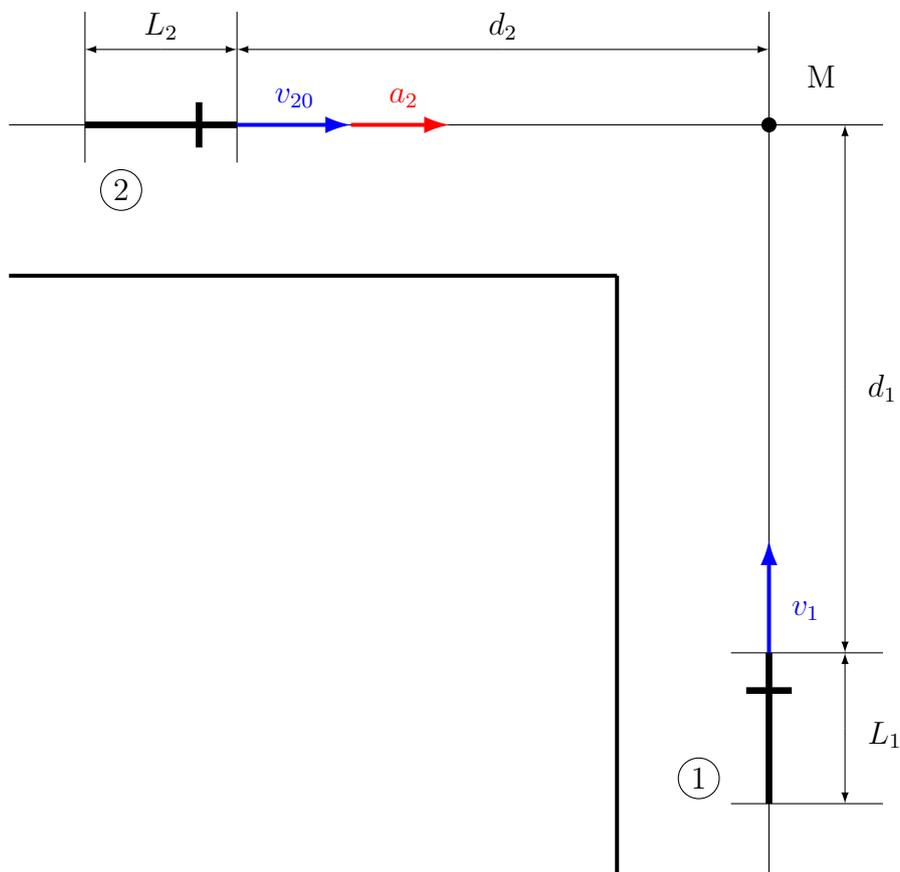
$$\alpha = \ddot{\varphi} = -\frac{\omega_0^2}{4\pi}$$

Eine negative Winkelbeschleunigung? Ja, der Massenpunkt wird abgebremst. ■

### 1.3.3. Übung, Kreuzung mit Motorrädern

Zwei Motorräder fahren auf eine Kreuzung zu, zum Zeitpunkt  $t = 0$  seien ihre Positionen und Geschwindigkeiten bekannt.

Gegeben:  $L_1, L_2, d_1, d_2, v_1 = \text{const.}, v_{20} = v_2(t = 0)$ .



Mit welcher konstanten

- Verzögerung ( $a_2 < 0$ ),
- Beschleunigung ( $a_2 > 0$ )

muss Motorrad ② reagieren, um eine Kollision zu vermeiden? Es wird sehr riskant gefahren. Jeweils ein Vorderrad berührt das Hinterrad des Anderen, ohne dass es zu einem Unfall kommt.

**Lösung**

Generell gilt für a) und b)

$$\begin{array}{ll}
 & \ddot{x}_2 = a_2 = \text{const.} & \ddot{x}_1 = 0 \\
 2 \text{ mal int.} & \dot{x}_2 = a_2 t + c_1 & \dot{x}_1 = 0 \cdot t + c_3 \\
 & x_2 = \frac{a_2}{2} t^2 + c_1 t + c_2 & x_1 = c_3 t + c_4 \\
 \text{AB1} & \dot{x}_2(t=0) = v_{20} & \dot{x}_1(t=0) = v_1 \\
 \text{AB2} & x_2(t=0) = 0 & x_1(t=0) = 0
 \end{array}$$

Die bis zum Zeitpunkt  $t = 0$  zurückgelegten Wegstrecken sind ohne jeden Belang. Wir können fast immer die Anfangsbedingungen für Wege (oder Winkel) willkürlich auf Null setzen.

$$\begin{array}{lll}
 c_{1,2,3,4} \text{ best. AB1} & c_1 = v_{20} & c_3 = v_1 \\
 \text{AB2} & c_2 = 0 & c_4 = 0 \\
 \text{tats. BewGl.} & \dot{x}_2 = a_2 t + v_{20} & \dot{x}_1 = v_1 \\
 & x_2 = \frac{a_2}{2} t^2 + v_{20} t & x_1 = v_1 t
 \end{array}$$

a) Motorrad (2) bremst ab, so dass sein Vorderrad am Punkt M das Heck von Motorrad (1) berührt. Dies wird in den Endbedingungen festgehalten.

Wir werden feststellen, dass bei den Endbedingungen nicht immer Aussagen getroffen werden können. Anders als bei den Anfangsbedingungen dürfen wir bei den Endbedingungen auch gelegentlich Lücken lassen. Hier trifft das bei den Geschwindigkeiten zu. Wie schnell (2) am Punkt M bei diesem waghalsigen Manöver sein wird, wissen wir nicht. Grübeln Sie in solchen Fällen nicht unnötig lang, machen Sie aber auch keine wilden Annahmen. Nur weil Sie eine Geschwindigkeit nicht wissen, ist sie noch lange nicht Null.

$$\begin{array}{ll}
 \text{EB1} & \dot{x}_2(t=T) = ? & \dot{x}_1(t=T) = ? \text{ oder } v_1 \\
 \text{EB2} & x_2(t=T) = d_2 & x_1(t=T) = L_1 + d_1
 \end{array}$$

Auch wenn nach der Zeit  $T$  nicht gefragt wird, so ist der Schritt „ $T$  bestimmen“ doch immer unverzichtbar. Wir suchen eine EB, die aussagekräftig ist und zu möglichst einfachen Ergebnissen führt (quadratische Gleichungen sind tunlichst zu meiden).

EB2 für  $x_1(t = T)$  ist hier erfolgversprechend.

$$T \text{ best. hier EB2 für } x_1 \quad L_1 + d_1 = v_1 T$$

$$T = \frac{L_1 + d_1}{v_1}$$

Der letzte Schritt ist das Berechnen der gesuchten Größe. In diesem Fall ist es  $a_2$ . Zur Verfügung stehen der Ausdruck für die Zeit  $T$  sowie die aussagekräftige EB2 für  $x_2(t = T)$ .

$$\text{ges. Größe best. hier } a_2 \quad d_2 = \frac{a_2}{2} T^2 + v_{20} T$$

$$\text{nach } a_2 \text{ auflösen} \quad \frac{a_2}{2} T^2 = d_2 - v_{20} T$$

$$\text{ausklammern} \quad a_2 = \frac{2}{T^2} (d_2 - v_{20} T)$$

$$T \text{ einsetzen} \quad a_2 = 2 \left( \frac{v_1}{L_1 + d_1} \right)^2 \cdot \left( d_2 - v_{20} \frac{L_1 + d_1}{v_1} \right)$$

Kein schönes Ergebnis aber ein Ergebnis.

- b) Nun beschleunigt Motorrad (2) so, dass sein Hinterrad am Punkt M das Vorderrad von (1) berührt. Die EBen müssen dahin angepasst werden.

$$\text{EB1} \quad \dot{x}_2(t = T) = ? \quad \dot{x}_1(t = T) = ? \text{ oder } v_1$$

$$\text{EB2} \quad x_2(t = T) = L_2 + d_2 \quad x_1(t = T) = d_1$$

$$T \text{ best. hier EB2 für } x_1 \quad d_1 = v_1 T$$

$$T = \frac{d_1}{v_1}$$

$$\text{ges. Größe best. hier } a_2 \quad L_2 + d_2 = \frac{a_2}{2} T^2 + v_{20} T$$

$$\text{nach } a_2 \text{ auflösen} \quad \frac{a_2}{2} T^2 = L_2 + d_2 - v_{20} T$$

$$\text{ausklammern} \quad a_2 = \frac{2}{T^2} (L_2 + d_2 - v_{20} T)$$

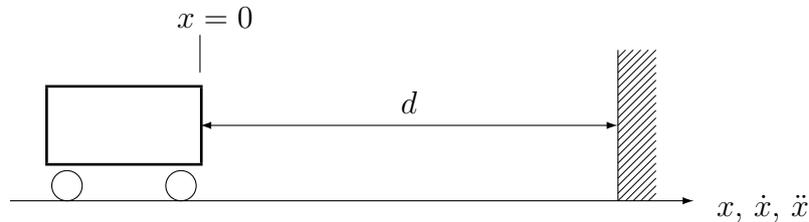
$$T \text{ einsetzen} \quad a_2 = 2 \left( \frac{v_1}{d_1} \right)^2 \cdot \left( L_2 + d_2 - v_{20} \frac{d_1}{v_1} \right)$$

■

## 1.3.4. Übung, Auto im Nebel

Wie schnell darf ein Auto mit einer Beschleunigung  $a_0 = \text{const.}$  bei einer Sichtweite  $b$  fahren, um rechtzeitig vor einem Hindernis zum Stehen zu kommen. Die Reaktionszeit sei 0.

Geg:  $a_0 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $b = 50 \text{ m}$ , Ges:  $v_0$



## Lösung

$$\ddot{x} = a_0 = \text{const.}$$

$$2 \text{ mal int.} \quad \dot{x} = a_0 t + c_1$$

$$x = \frac{a_0}{2} t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\text{AB1} \quad \dot{x}(t=0) = v_0 = ?$$

$$\text{AB2} \quad x(t=0) = 0$$

$$c_{1,2} \text{ best.} \quad c_1 = v_0, \quad c_2 = 0$$

$$\text{tats. BewGl.} \quad \dot{x} = a_0 t + v_0$$

$$x = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t$$

$$\text{EB1} \quad \dot{x}(t=T) = 0$$

$$\text{EB2} \quad x(t=T) = b$$

$$T \text{ best. (hier EB1)} \quad T = -\frac{v_0}{a_0}$$

Eine negative Zeit? Abwarten, hier wird abgebremst,  $a_0$  ist negativ. Alles wird gut. Nun wird die gesuchte Größe  $v_0$  berechnet. Die aussagekräftige EB2 und der Ausdruck für  $T$  stehen zur Verfügung.

ges. Größe best., hier  $v_0$       $b = \frac{a_0}{2} T^2 + v_0 T$

$T$  einsetzen      $b = \frac{a_0}{2} \frac{v_0^2}{a_0^2} - v_0 \frac{v_0}{a_0}$

$$b = -\frac{v_0^2}{2 a_0}$$

nach  $v_0$  auflösen      $v_0^2 = -2 b a_0$

$$v_0 = \sqrt{-2 b a_0}$$

$$v_0 = \sqrt{-2 \cdot 50 \cdot (-5)} \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$v_0 = 22,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



## 2. Kinetik

Bisher, in der Kinematik, wird nur beschrieben, wie ein Massenpunkt sich bewegt. Nach Ursachen wird nicht gefragt. Das ändert sich jetzt in der Kinetik. Wir sehen hier wieder einmal die Unsitte, unterschiedliche Dinge mit leicht verwechselbaren Begriffen zu versehen: konkav–konvex, Stalagmiten–Stalaktiten, Hypothermie–Hyperthermie, Pronation–Supination, insbesondere die Medizin spielt dieses Spiel mit großer Wonne.

Kinetik beschreibt den Zusammenhang zwischen Kräften und Beschleunigungen. Für bewegte Massenpunkte gilt das

### 2.1. NEWTONSche Axiom

Axiome sind grundlegende Gesetze, die nicht bewiesen werden können aber empirisch abgesichert sind. Sie gelten so lange, bis sie widerlegt werden

$$(III.10) \quad \vec{F} = m \vec{a}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Die Masse  $m$  ist im Rahmen der klassischen Mechanik eine Proportionalitätskonstante

Dieses Axiom wurde 1687 von Sir Isaac NEWTON in seinem bahnbrechenden Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* aufgestellt und überdauerte unangefochten genau 228 Jahre. Im Jahr 1915 wurde es von Albert EINSTEIN in seiner speziellen Relativitätstheorie widerlegt. Die Masse ist keineswegs eine Konstante. Bewegt sich ein Körper oder Massenpunkt sehr schnell (nahe Lichtgeschwindigkeit), so nimmt seine Masse dramatisch zu. Bei Erreichen der Lichtgeschwindigkeit wäre die Masse des kleinsten Staubkorns unendlich. Somit ist sichergestellt, dass kein massebehafteter Körper Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. Die Kräfte die notwendig wären, ihn auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen, müssten ebenfalls unendlich sein. Für uns ändert sich aber nichts. Wir betreiben NEWTONSche oder klassische Mechanik. Die Raserei der relativistischen Mechanik überlassen wir Anderen. So schnell können und wollen wir gar nicht.

Wirken mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt, gelten die unwiderlegten Axiome der Statik

$$(III.11) \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Gleichung III.10 lautet im kartesischen  $(x, y, z)$  Koordinatensystem

$$(III.12) \quad X = m \ddot{x}, \quad Y = m \ddot{y}, \quad Z = m \ddot{z}$$

mit  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$  gilt auch  $\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}$ .

Gleichung III.12 auf der vorherigen Seite in natürlicher Zerlegung bei Bewegungen auf Kreisbahnen lautet

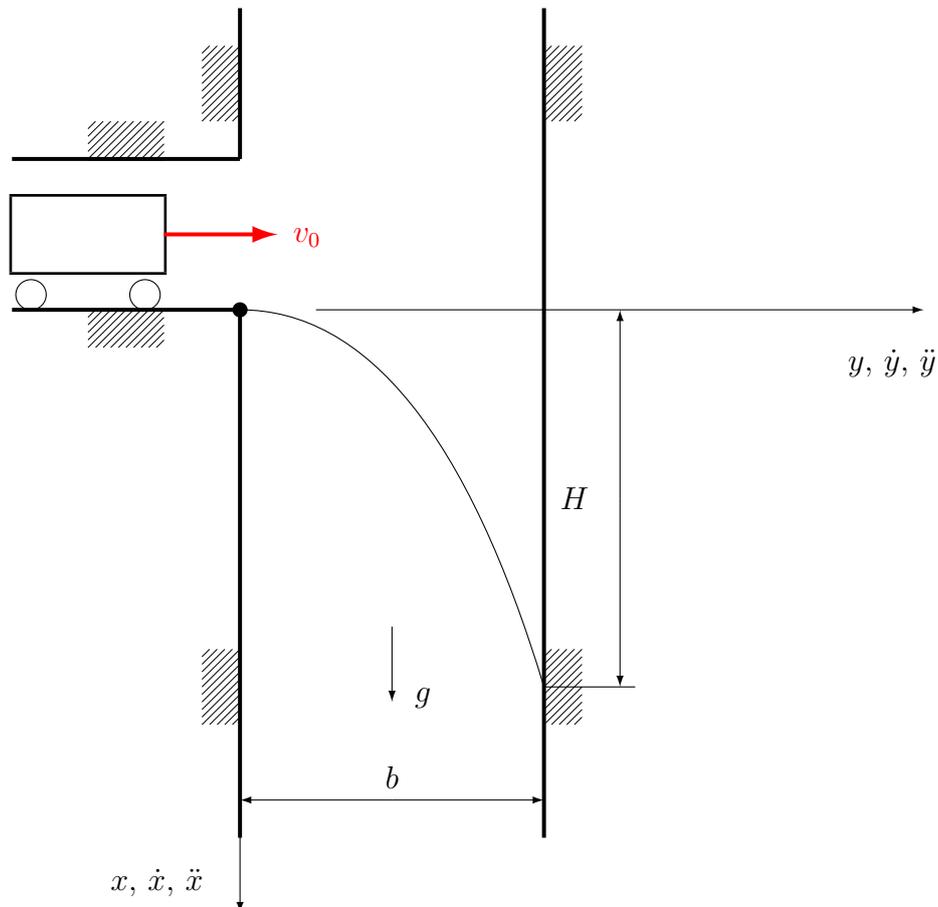
$$(III.13) \quad \begin{aligned} F_t &= m r \dot{\omega} = m r \dot{\varphi}, \\ F_n &= m r \omega^2 = m r \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$



### 2.1.1. Übung, Hunt in den Schacht gefallen

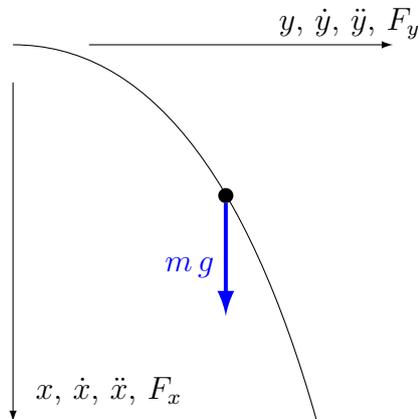
Ein Hunt (Förderwagen) ist in einen seigeren (senkrechten) Schacht gefallen. In einem Abstand  $H$  unter der Hängebank (Stollensohle) hat er an der gegenüberliegenden Schachtausmauerung Spuren hinterlassen. Mit welcher Geschwindigkeit  $v_0$  muss der Wagen in den Schacht gerollt sein? Man betrachte den Wagen als Massenpunkt von beliebiger Masse  $m$ , der sich zunächst auf der  $y$ -Achse bewegt und dann abstürzt.

Geg.:  $H = 20$  m,  $b = 4,5$  m,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Ges.:  $v_0$ .



**Lösung**

Anwendung des NEWTONSchen Grundgesetz auf den frei fliegenden Massenpunkt. Welche Kräfte wirken?



Ist  $mg$ , die Gewichtskraft, wirklich die einzige Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt? Erwarten Sie etwa eine Kraft, die in  $y$ -Richtung den Massenpunkt quer durch den Schacht zieht? Wo soll die herkommen? Hauer Karl, der den Wagen schob, konnte zum Glück an der Kante stehen bleiben. Wer soll jetzt noch schieben? Luftwiderstand kann vernachlässigt werden.

Es liegt eine zweidimensionale Bewegung vor. Das NewtonGG muss daher für beide Richtungen aufgestellt werden.

Wichtig ist nun, dass wir die kinematischen Größen und die kinetischen Größen in jeweils gleicher Richtung positiv annehmen. Hier ist dies erkennbar an der Achsenbeschriftung  $x, \dot{x}, \ddot{x}, F_x$  und  $y, \dot{y}, \ddot{y}, F_y$ .

$$\begin{array}{ll}
 m \ddot{x} = m g & m \ddot{y} = 0 \\
 \ddot{x} = g = \text{const.} & \ddot{y} = 0 \\
 \text{2 mal int.} & \dot{x} = g t + c_1 & \dot{y} = c_3 \\
 & x = \frac{g}{2} t^2 + c_1 t + c_2 & y = c_3 t + c_4 \\
 \text{AB1} & \dot{x}(t=0) = 0 & \dot{y}(t=0) = v_0 \\
 \text{AB2} & x(t=0) = 0 & y(t=0) = 0
 \end{array}$$

Da der Stollen totsöhlig (horizontal) verläuft, gibt es keine Anfangsgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung. Bereits zurückgelegte Wege zu Beginn der Katastrophe sind uninteressant und können willkürlich zu Null gesetzt werden.

|                     |                       |                                 |
|---------------------|-----------------------|---------------------------------|
| $c_{1,2,3,4}$ best. | $c_1 = 0$             | $c_3 = v_0$                     |
|                     | $c_2 = 0$             | $c_4 = 0$                       |
| tats. BewGl.        | $\dot{x} = g t$       | $\dot{y} = v_0$                 |
|                     | $x = \frac{g}{2} t^2$ | $y = v_0 t$                     |
| EB1                 | $\dot{x}(t = T) = ?$  | $\dot{y}(t = T) = ?$ oder $v_0$ |
| EB2                 | $x(t = T) = H$        | $y(t = T) = b$                  |

Erneut wissen wir nicht, wie die Geschwindigkeiten beim Einschlag in die Schachtwand sind. Bei der  $y$ -Richtung könnte man darauf kommen, dass  $v_0$  ansteht. Notwendig ist diese Erkenntnis hingegen nicht.

Jetzt muss der Zeitpunkt  $T$  bestimmt werden. Wieder vermeiden wir EBen für Gleichungen, bei denen  $t$  quadratisch auftaucht. EB2 für  $y$  ist hervorragend geeignet.

$$T \text{ bestimmen} \quad b = v_0 T$$

$$T = \frac{b}{v_0}$$

Mit der verbliebenen aussagekräftigen EB2 für  $x$  und der Zeit  $T$  wird abschließend die gesuchte Größe  $v_0$  berechnet

$$\text{ges. Größe best.} \quad H = \frac{g}{2} T^2$$

$$H = \frac{g}{2} \frac{b^2}{v_0^2}$$

$$v_0^2 = \frac{g}{2} \frac{b^2}{H}$$

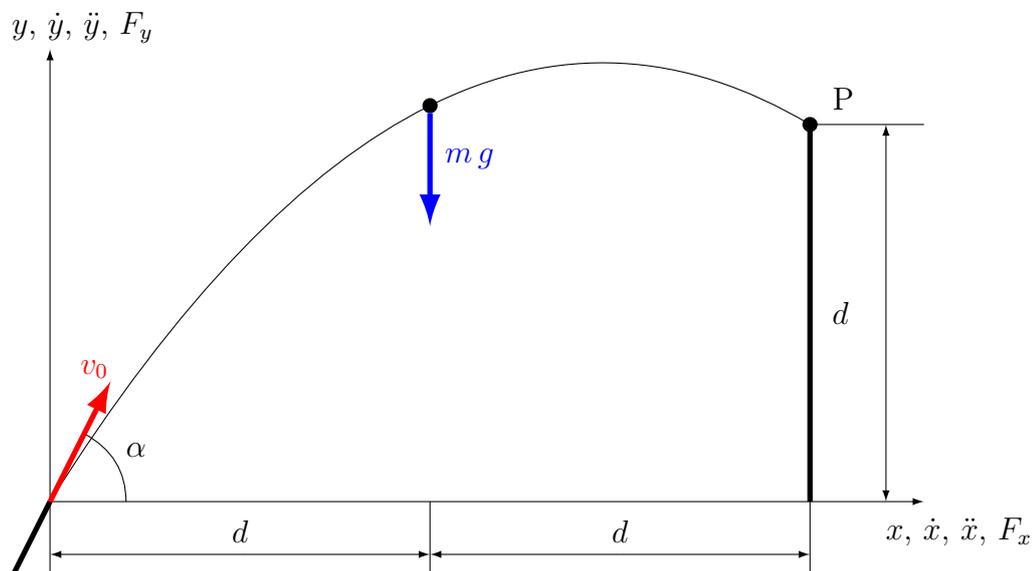
$$v_0 = \sqrt{\frac{g b^2}{2 H}}$$

$$v_0 = 2,23 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tja, mit etwa  $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  war Hauer Karl unerlaubterweise schneller als mit Schrittgeschwindigkeit unterwegs. Das gibt Mecker vom Obersteiger (Grubenaufseher). ■

### 2.1.2. Übung, schräger Schuss

Mit einem Geschütz mit vorgegebener Elevation  $\alpha$  soll auf den Punkt P geschossen werden. Welche Mündungsgeschwindigkeit  $v_0$  ist notwendig?



Geg.:  $d, g, \alpha, m$  (beliebig), kein Luftwiderstand. Ges.:  $v_0$

Die Frage erscheint ungewöhnlich und praxisfremd. Realistischer ist doch die Frage, wie hoch man zielen muss, denn die Munition und damit das  $v_0$  dürfte doch gegeben sein. Leider ist diese Aufgabenstellung analytisch nicht lösbar. Sie können spaßeshalber versuchen, das Ergebnis nach  $\alpha$  aufzulösen. Das ist hoffnungslos, wir bekommen eine transzendente Gleichung, sie ist nicht auflösbar. Lediglich Iterationen sind möglich (so etwas nennt man dann Maschinengewehr). Also bleiben wir bei der Suche nach  $v_0$

**Lösung**

Anwendung des NEWTONschen Grundgesetz auf das frei fliegende Projektil. Erneut liegt eine zweidimensionale Bewegung vor. Das NewtonGG muss daher für beide Richtungen aufgestellt werden.

$$\begin{array}{ll}
 m \ddot{x} = 0 & m \ddot{y} = -m g \\
 \ddot{x} = 0 = \text{const.} & \ddot{y} = -g = \text{const.} \\
 \text{2 mal int.} & \dot{x} = c_1 & \dot{y} = -g t + c_3 \\
 & x = c_1 t + c_2 & y = -\frac{g}{2} t^2 + c_3 t + c_4 \\
 \text{AB1} & \dot{x}(t=0) = v_0 \cos \alpha & \dot{y}(t=0) = v_0 \sin \alpha \\
 \text{AB2} & x(t=0) = 0 & y(t=0) = 0
 \end{array}$$

Hier muss die gesuchte Anfangsgeschwindigkeit in ihre  $x$ - und  $y$ -Komponente zerlegt werden. Der bisher zurückgelegte Weg z.B. der im Lauf ist erneut uninteressant. Der betrachtete Schuss beginnt für uns, wenn das Projektil den Lauf verlassen hat. Die Gaskräfte, die das Projektil ausgestoßen haben, wirken schon nicht mehr.

$$\begin{array}{ll}
 c_{1,2,3,4} \text{ best.} & c_1 = v_0 \cos \alpha & c_3 = v_0 \sin \alpha \\
 & c_2 = 0 & c_4 = 0 \\
 \text{tats. BewGl.} & \dot{x} = v_0 \cos \alpha & \dot{y} = -g t + v_0 \sin \alpha \\
 & x = v_0 \cos \alpha t & y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin \alpha t \\
 \text{EB1} & \dot{x}(t=T) = ? & \dot{y}(t=T) = ? \\
 \text{EB2} & x(t=T) = 2 d & y(t=T) = d
 \end{array}$$

Erneut wissen wir nicht, wie die Geschwindigkeiten beim Einschlag in Punkt P sind. Jetzt muss der Zeitpunkt  $T$  bestimmt werden. Wieder vermeiden wir EBen für Gleichungen, bei denen  $t$  quadratisch auftaucht. EB2 für  $x$  ist geeignet.

$$T \text{ bestimmen} \quad 2 d = v_0 \cos \alpha T$$

$$T = \frac{2 d}{v_0 \cos \alpha}$$

Mit der verbliebenen aussagekräftigen EB2 für  $y$  und der Zeit  $T$  wird abschließend die gesuchte Größe  $v_0$  berechnet.

$$d = -\frac{g}{2} T^2 + v_0 \sin \alpha T$$

$$d = -\frac{g}{2} \frac{4 d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + v_0 \sin \alpha \frac{2 d}{v_0 \cos \alpha}$$

$$d = -\frac{2 g d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + 2 d \tan \alpha$$

$$\frac{2 g d^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 2 d \tan \alpha - d$$

$$v_0^2 = \frac{2 g d^2}{\cos^2 \alpha (2 d \tan \alpha - d)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 g d}{\cos^2 \alpha (2 \tan \alpha - 1)}}$$

Versuchen Sie es gar nicht erst, das Ergebnis nach  $\alpha$  aufzulösen. Darüber werden Sie alt und grau. Es liegt nicht daran, dass Ihnen die Fähigkeiten fehlten, es geht einfach nicht.

Sollte der Winkel  $\alpha$  nicht groß genug sein, wird der Nenner negativ, die Wurzel komplex.

Wenn

$$\tan \alpha < \frac{1}{2},$$

dann zielen Sie zu tief; die Geschwindigkeit bekommt ein komplexes Ergebnis. Ein Treffer ist nicht mehr möglich. Bei

$$\tan \alpha = \frac{1}{2},$$

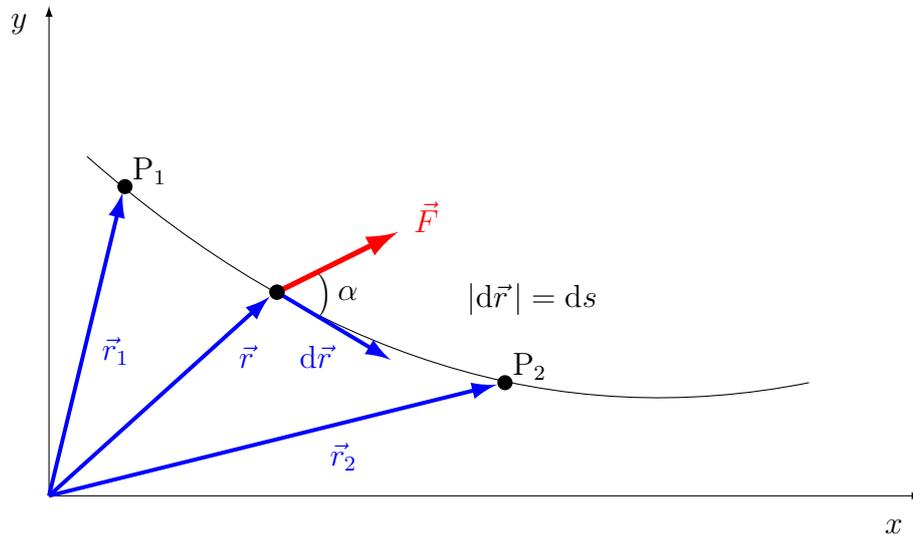
könnten Sie durch den Lauf den Zielpunkt sehen, sie halten genau drauf. Der Nenner wird Null und Sie müssten mit unendlich großer Geschwindigkeit schießen. Einstein schüttelt in diesem Fall weise den Kopf oder streckt Ihnen die Zunge heraus. Das Schießen – oder besser das Treffen – ist in der Realität noch viel schwieriger. Der Luftwiderstand macht die Sache erst richtig kompliziert.

■

## 2.2. Arbeit am Massenpunkt

Wird ein Massenpunkt durch eine Kraft  $\vec{F}$  auf seiner Bahnkurve um einen differentiellen Weg  $d\vec{r}$  bewegt, so wird ihm eine differentielle Arbeit zugeordnet.

$$(III.14) \quad dW = \vec{F} d\vec{r} = F ds \cos \alpha.$$



Längs eines endlichen, bestimmten Wegs  $P_1(\vec{r}_1) \rightarrow P_2(\vec{r}_2)$  auf der Bahnkurve ist die von der Kraft  $\vec{F}$  verrichtete Arbeit

$$(III.15) \quad W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}.$$

$$\dim [W] = \text{Kraft} \cdot \text{Länge}, \quad \text{Einheit: Nm} = \text{Ws} = \text{J}$$

Drei Bemerkungen:

1. Vermeiden Sie den Ausdruck „Arbeit wird geleistet“. Arbeit wird immer verrichtet. Im Zusammenhang mit Arbeit das Verb „leisten“ zu verwenden, ist irreführend, da Leistung eine eigene physikalische Größe ist.
2. Die Einheit Nm ist ein alter Bekannter. Bisher kennen wir sie als Einheit für Momente. Es liegt hier einer der seltenen Fälle vor, dass zwei verschiedene physikalische Größen die gleiche Einheit haben. Später kommt noch eine dritte hinzu. Eine Größe namens Drehfedersteifigkeit wird auch in Nm angegeben. Wir müssen also aufpassen, wofür es gerade geht.
3. Die Arbeit ist die frei konvertierbare Währung zwischen den Disziplinen der Physik: Mechanik (Nm), Elektrotechnik (Ws), Thermodynamik (J). Es gilt

$$1\text{Nm} = 1\text{Ws} = 1\text{J}.$$

Gleichung (III.15) ist ein Kurvenintegral, welches für jeden Einzelfall in ein RIEMANN<sup>18</sup>ches Integral umgewandelt werden muss.

### 2.3. Leistung am Massenpunkt

$$(III.16) \quad P = \frac{dW}{dt}.$$

Bei konstanter Kraft  $\vec{F}$  vereinfacht sich die Leistung zu

$$P = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}.$$

$$\dim [P] = \frac{\text{Kraft} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}}, \quad \text{Einheit: } \frac{\text{N m}}{\text{s}} = \text{W}.$$

Aus (III.15) und (III.16) folgt durch Integration über die Zeit

$$(III.17) \quad W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt.$$

Das Vorzeichen der Arbeit wird dabei durch die Größe

$$\cos \alpha = \cos \left( \angle \vec{F}, d\vec{r} \right)$$

bestimmt. Siehe auch Gleichung (III.14). Das bedeutet, dass es für die Arbeit folgende Möglichkeiten gibt:

$$W \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0$$

Das ist wahrlich eine fundamentale Erkenntnis. Arbeit kann positiv oder negativ sein. Die Arbeit ist positiv, wenn das betrachtete Teilsystem Arbeit „bekommt“. Denken Sie an einen Bollerwagen, den Sie den Berg hochziehen, er bekommt Arbeit. Zugkraft und zurückgelegter Weg zeigen tendenziell in die gleiche Richtung bzw. der Winkel zwischen Kraft und Weg ist kleiner  $90^\circ$ . Das Skalarprodukt ist positiv. Bei negativer Arbeit denken Sie an ein Gewicht, das Sie mit einer Leine abseilen wollen. Weg (nach unten) und Kraftrichtung (nach oben) sind entgegengesetzt. Hier gibt die Last Arbeit ab. Es gibt aber auch Kräfte, die verrichten gar keine Arbeit, dann wird die Arbeit Null sein.

<sup>18</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 bis 1866, bedeutender Mathematiker, er lehrte in Göttingen.

## Beispiele

1. Kräfte, die keine Arbeit verrichten, d.h.

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

- a) Kraftangriffspunkte ruhen:  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$  bzw.  $d\vec{r} = 0$ . Das gilt für

- Lagerkräfte
- Haftreibungskräfte
- Reaktionskräfte an den Berührstellen rollender Körper

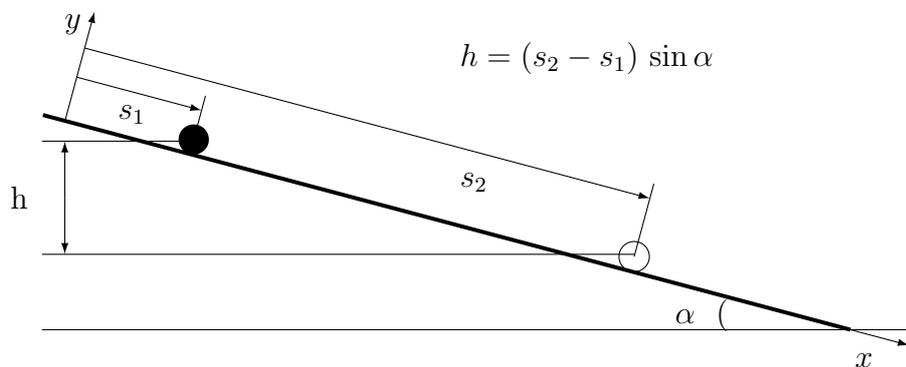
- b) Kräfte, die senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor stehen

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{F} \perp d\vec{r}$$

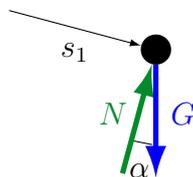
Das gilt immer für Normalkräfte.

2. Einfache Berechnung der Arbeit

- a) Massenpunkt auf glatter Ebene auf dem Weg von  $s_1$  nach  $s_2$ .



Massenpunkt von der Ebene abgeschnitten



$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} s_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} G \sin \alpha \\ N - G \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} \begin{pmatrix} G \sin \alpha \\ N - G \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{s_1}^{s_2} G \sin \alpha dx.$$

Nummehr gilt

$$W_{1 \rightarrow 2} = G \sin \alpha \int_{s_1}^{s_2} dx = G \sin \alpha (s_2 - s_1)$$

und wegen  $h = (s_2 - s_1) \sin \alpha$  folgt in diesem besonderen Fall

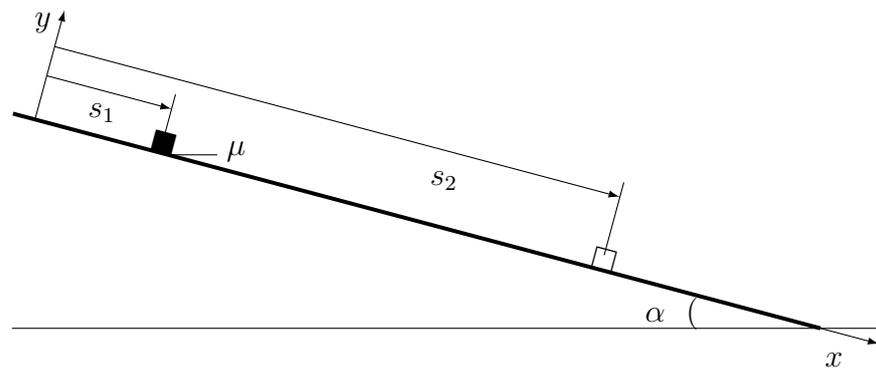
$$W_{1 \rightarrow 2} = G h.$$

Wir stellen fest, dass der Winkel  $\alpha$  im Ergebnis keine Rolle mehr spielt. Die Bahn zwischen den Positionen  $s_1$  und  $s_2$  könnte auch ganz anders aussehen. Sie könnte wie die Rutsche eines Spaßbades kurvig sein und Hügel und Senken haben.

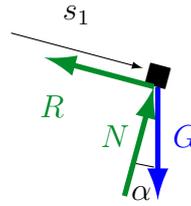
Dieses einfache Ergebnis ist eine Merkmal für konservative Systeme.

Konservativ ist hier keine politische Aussage; vielmehr beschreibt der Begriff die Reibungsfreiheit. Die Energie im System wird bewahrt und nicht in Wärme umgesetzt.

- b) Massenpunkt auf rauher Ebene (Gleitreibungskoeffizient  $\mu$ ) auf dem Weg von  $s_1$  nach  $s_2$ .



Massenpunkt von der Ebene abgeschnitten



$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} G \sin \alpha - R \\ N - G \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \begin{pmatrix} G \sin \alpha - R \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_{s_1}^{s_2} (G \sin \alpha - R) dx.$$

Wegen  $R = \mu N$  und  $N = G \cos \alpha$ , folgt  $R = \mu G \cos \alpha$ . Somit ist

$$W_{1 \rightarrow 2} = G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \int_{s_1}^{s_2} dx = G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) (s_2 - s_1).$$

In diesem Beispiel lassen sich nicht – wie in Beispiel 2a) – der Winkel  $\alpha$  und  $(s_2 - s_1)$  gleichzeitig eliminieren. Hier ist die Arbeit abhängig von der speziellen Form der Bahn.

Das ist einleuchtend. Wäre die Bahn von  $s_1$  nach  $s_2$  kurvenreich, so würde der Weg erheblich länger; der Einfluss der Reibkraft  $R$  nähme zu. Wäre der Weg eine Berg-und-Talbahn, wäre der Winkel  $\alpha$  von  $x$  abhängig und müsste im Integral bleiben; auch das hätte Einfluss auf die Arbeit.

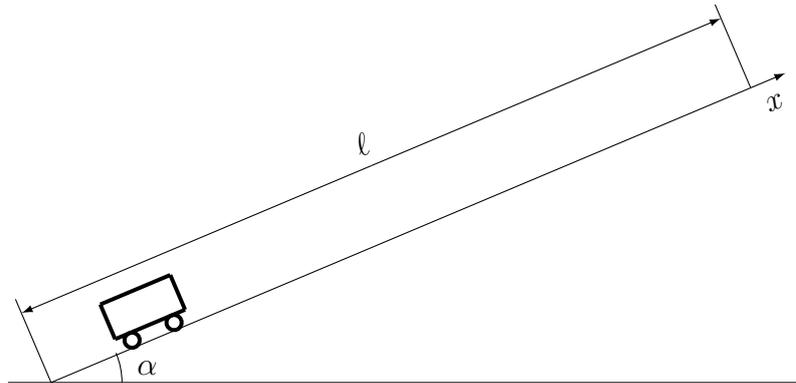
■

**2.3.1. Übung, Schrägaufzug, Förderarbeit**

Ein Schrägaufzug hat eine Steigung von  $\alpha = 23^\circ$  und ist 38 m lang. Ein Wagen mit der Masse 2500 kg wird mit konstanter Geschwindigkeit gefördert.

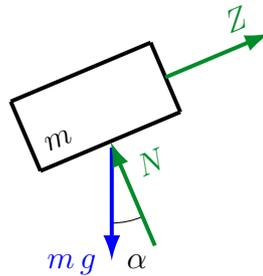
Gesucht:

- Zugkraft, parallel zur Förderebene (kein Fahrwiderstand),
- Förderarbeit für eine Fahrt.



**Lösung**

a) Zugkraft



NEWTONsches Grundgesetz:

$$\sum X_i = m \ddot{x}, \quad \text{da } v = \text{const.} \rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$Z - m g \sin \alpha = 0$$

$$Z = m g \sin \alpha$$

$$Z = 9,58 \text{ kN.}$$

b) Förderarbeit

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r},$$

$$\text{hier } W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x=0}^{x=\ell} Z dx,$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = Z x \Big|_{x=0}^{x=\ell},$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = Z \ell = m g \sin \alpha \cdot \ell,$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = 3,64 \cdot 10^5 \text{ Nm} = 364 \text{ kJ.}$$

■

## 2.4. Leistung bei stationären Bewegungen

Gemäß (III.16) gilt bei Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit bzw. konstanter Winkelgeschwindigkeit

$$(III.18) \quad \begin{array}{ll} P = F \cdot v = F \cdot \dot{x} & \text{(translatorische Bewegung),} \\ P = M \cdot \omega = M \dot{\varphi} & \text{(rotatorische Bewegung).} \end{array}$$

Zu (III.18) gibt es eine praktische Faustformel für Rotationen mit der Drehzahl  $n$ :

$$P = M \frac{\pi n}{30} \approx \frac{M n}{10}.$$

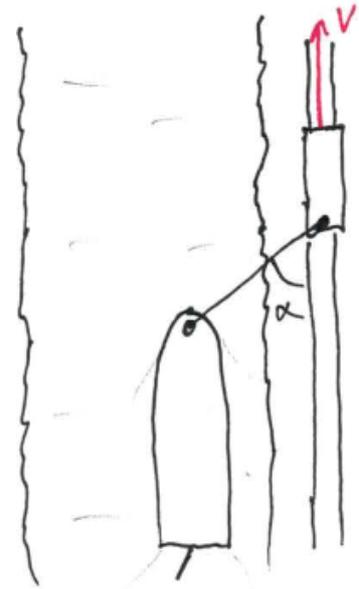


## 2.4.1. Übung, Treideln eines Schiffs

Ein Schiff wird durch eine Lok getreidelt. Die Schleppleinekraft beträgt  $S = 8 \text{ kN}$ . Sie hat einen Winkel  $\alpha = 28^\circ$ .

Gesucht:

- Arbeit der Lok für Weg  $\ell = 3 \text{ km}$ ,
- Zugleistung für eine Geschwindigkeit  $v$  von etwa  $5 \text{ km}$  (genau  $2,5 \text{ m/s}$ ).



## Lösung

Zwischen der Vorausrichtung der Lok ( $x$ , bzw.  $v$ ) und der Zugrichtung der Schleppleine liegt der Winkel  $\beta = \pi - \alpha$ .

a)

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r},$$

hier 
$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{x=0}^{x=\ell} S \cos \beta dx,$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = S \ell \cos(\pi - \alpha),$$

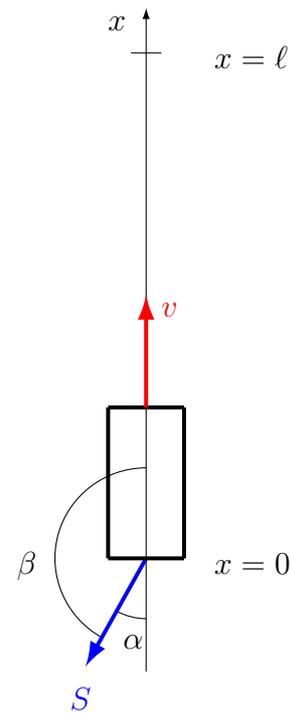
$$W_{1 \rightarrow 2} = -2,12 \cdot 10^7 \text{ Nm} = -21,2 \text{ MJ}.$$

b)

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v},$$

$$P = S v \cos(\pi - \alpha),$$

$$P = -17,7 \cdot 10^3 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = -17,7 \text{ kW}.$$



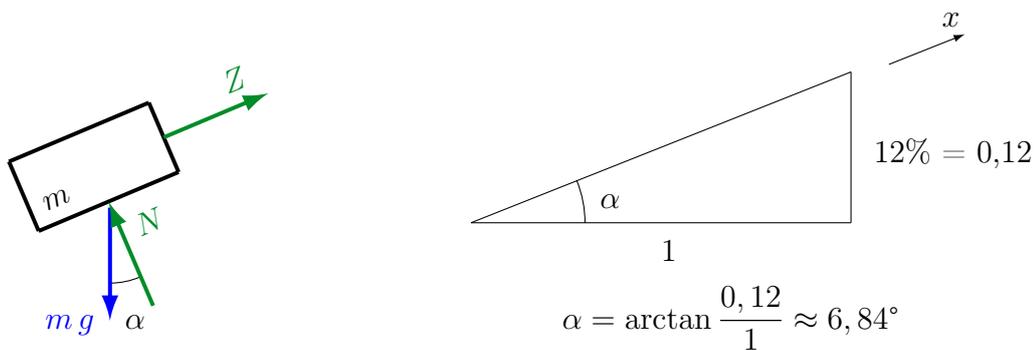
Da die Fahrtrichtung und die Krafrichtung von  $S$  in nahezu entgegengesetzte Richtung zeigen, sind Arbeit und Leistung negativ. Die Lok gibt Arbeit und Leistung ans Schiff ab. ■

### 2.4.2. Übung, Schrägaufzug mit Angabe der Leistung

Der Wagen eines Schrägaufzugs hat eine Masse von 1800 kg. Die Steigung beträgt 12%. Es ist ein Motor mit einer Leistung von 4,5 kW installiert.

Gesucht ist die gleichförmige Fahrgeschwindigkeit bei Nennleistung ohne Fahrwiderstände.

#### Lösung



NEWTONSches Grundgesetz in  $x$ -Richtung bei gleichförmiger Geschwindigkeit.

$$Z - m g \sin \alpha = m \ddot{x} = 0, \quad \text{da } v = \text{const}$$

$$Z = m g \sin \alpha$$

$$P = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}, \quad \text{hier } P = Z v$$

$$v = \frac{P}{Z} = \frac{P}{m g \sin(\arctan 0,12)}$$

$$v = 2,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

■

## 2.5. Arbeitssatz für Massenpunkte

Aus dem NEWTONschen Axiom (Gleichung III.10 auf Seite 228) kann durch Integration über die Zeit der Arbeitssatz entwickelt werden.

$$(III.19) \quad \underbrace{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \, d\vec{r}}_{W_{1 \rightarrow 2}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_2^2}_{E_{\text{kin}2}} - \underbrace{\frac{1}{2} m v_1^2}_{E_{\text{kin}1}}.$$

Die Ausdrücke  $\frac{1}{2} m v^2$  werden „kinetische Energie“ genannt.

$$E_{\text{kin}1} = \frac{1}{2} m v_1^2: \text{Kinetische Energie in der Position 1,}$$

$$E_{\text{kin}2} = \frac{1}{2} m v_2^2: \text{Kinetische Energie in der Position 2.}$$

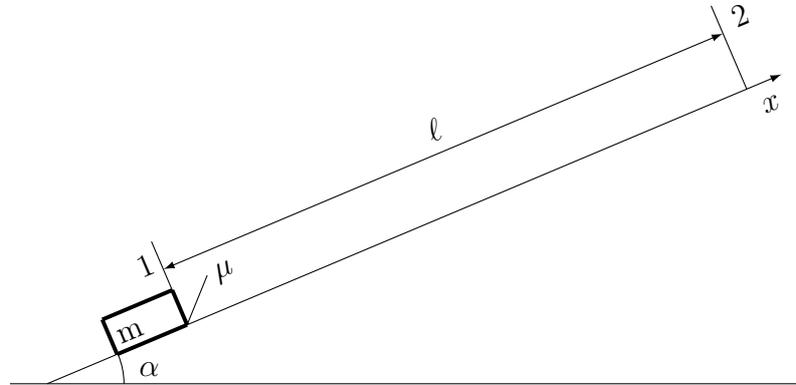
Gleichung III.19 ist gleichzeitig der Arbeitssatz für einen Massenpunkt

$$(III.20) \quad W_{1 \rightarrow 2} = E_{\text{kin}2} - E_{\text{kin}1}.$$

In Worten: Die am Massenpunkt verrichtete Arbeit ist gleich der Änderung der Kinetischen Energie. ■

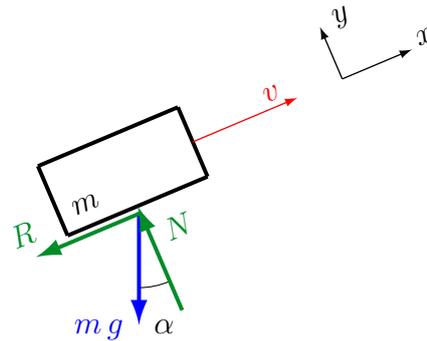
**2.5.1. Übung, Reibung mit Arbeitssatz**

Eine Masse wird mit  $v_1$  an Position 1 abgeschossen. Zwischen Masse und Unterlage besteht Reibung. Welche Geschwindigkeit hat die Masse an Position 2?



Gegeben:  $m, \ell, \alpha, \mu, v_1, g$

## Lösung



Arbeitssatz für Massenpunkte

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = E_{\text{kin}2} - E_{\text{kin}1}.$$

Beteiligte Vektoren

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -R - m g \sin \alpha \\ N - m g \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kinetische Energien

$$E_{\text{kin}2} = \frac{1}{2} m v_2^2; \quad E_{\text{kin}1} = \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Reibung

$$R = \mu N; \quad N = m g \cos \alpha; \quad R = \mu m g \cos \alpha.$$

Der Vektor  $dr$  zeigt, dass nur die  $x$ -Positionen der Vektoren von Einfluss sind. Daher:

$$\int_0^{\ell} (-\mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha) dx = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2).$$

Integrieren, Grenzen einsetzen

$$(-\mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha) \ell = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2).$$

$$-m g \ell (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2).$$

$m$  kürzen, nach  $v_2$  auflösen:

$$v_2^2 = v_1^2 - 2 g \ell (\mu \cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2 g \ell (\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}.$$

■

### 3. Hauptsätze der Körperdynamik

Bisher: Behandlung von Massenpunkten ohne Ausdehnung.

Jetzt: Betrachtung von ausgedehnten Körpern.

Nahezu unverändert gültig bleibt das NEWTONsche Axiom bzw. der Arbeitssatz.

Es erfolgt lediglich eine Namensänderung gleich im Folgekapitel

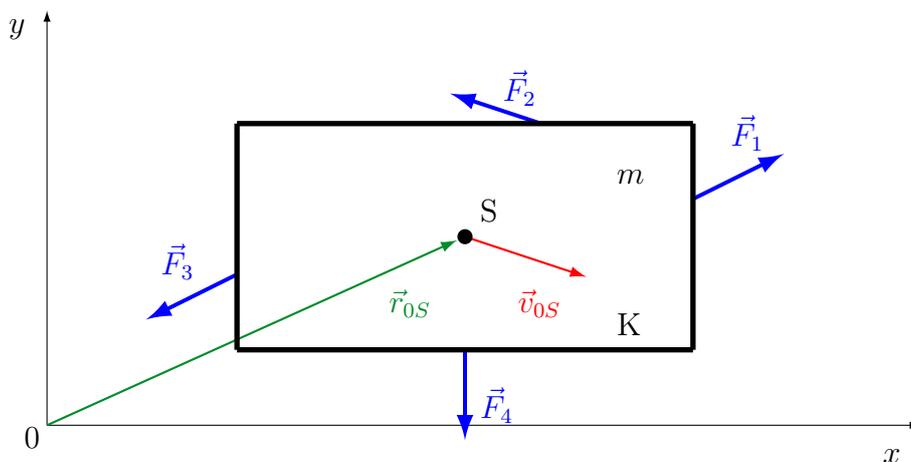
Neu und zusätzlich zu berücksichtigen: Drehbewegungen um einen Lagerungspunkt oder um den Schwerpunkt.

#### 3.1. Schwerpunktsatz

Durch eine längere Herleitung ist beweisbar, dass zur Beschreibung der translatorischen Bewegung eines Körpers ähnliche Gesetze aufgestellt werden können, wie bei der Bewegung von Massenpunkten.

Das ist wenig überraschend, da Massenpunkte ausschließlich translatorisch unterwegs sind. Drehbewegungen von Massenpunkten sind mangels Ausdehnung irrelevant.

Voraussetzung: Stellvertretend für den Gesamtkörper K wird Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körperschwerpunkt S betrachtet.



Der Schwerpunktsatz lautet

$$(III.21) \quad \sum \vec{F}_i = \vec{F} = m \ddot{\vec{r}}_{0S} = m \dot{\vec{v}}_{0S}.$$

mit

$\vec{r}_{0S}$ : Ortsvektor vom Koordinatenursprung 0 zum Schwerpunkt S.

$\ddot{\vec{r}}_{0S}$ : zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit.

$\vec{v}_{0S}$ : Geschwindigkeitsvektor von Schwerpunkt S im Koordinatensystem mit Ursprung 0 (zeigt nicht von 0 nach S).

Weiterführender Hinweis: Der Schwerpunktsatz ist ein Spezialfall des Impulssatzes. Der Impulssatz gilt für alle Körper (fest, flüssig, gasförmig). Der Schwerpunktsatz gilt nur für feste Körper.

$$(III.22) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{I}_0}{dt} \quad \text{mit} \quad \vec{I}_0 = \int_K \vec{v}_{0m} dm$$

### 3.2. Impulsmomentensatz

Im Gegensatz zum Massenpunkten können am ausgedehnten Körper Kräfte so angreifen, dass sie bezüglich eines beliebigen Körperpunktes (z.B. Schwerpunkt) ein Moment erzeugen. Ausgedehnte Körper können also in Drehung versetzt werden ( $\rightarrow$  rotatorische Bewegung). Zwei Fälle sind möglich:

1. Der Körper muss sich um einen bestimmten Punkt oder um eine bestimmte Achse drehen, da eine Lagerung vorhanden ist.
2. Der Körper kann sich frei bewegen (Raumschiff im All, Puck auf dem Eis); in diesem Fall erfolgt die rotatorische Bewegung immer um den Körperschwerpunkt.

Eine translatorische Bewegung kann in beiden Fällen überlagert sein.

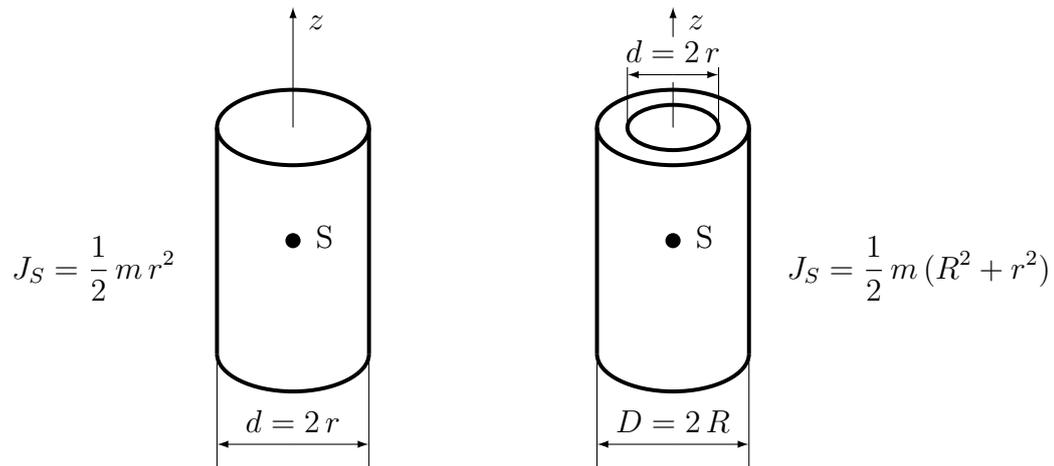
### Analogie

Bekannt: Kraft  $\sim$  Beschleunigung. Proportionalitätsfaktor Masse  $m$ .

Neu: Moment  $\sim$  Drehbeschleunigung bzw. Winkelbeschleunigung. Proportionalitätsfaktor ist noch zu klären.

Vereinfachung: Es werden ausschließlich Bewegungen in der  $x$ - $y$ -Ebene betrachtet. Als Proportionalitätsfaktor wird die Größe Massenträgheitsmoment  $J$  eingeführt. Es beschreibt die Trägheit gegenüber Drehbewegungen um eine bestimmte Achse, hier um die  $z$ -Achse.

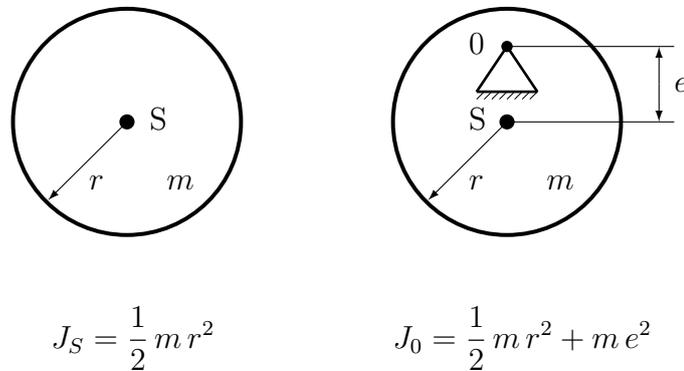
Beispiele für Massenträgheitsmomente (MTM) bei Bewegungen um den Schwerpunkt.



Beim Hohlzylinder mit  $J_S = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$  verwundert das Pluszeichen. Wäre  $m$  die Masse des ursprünglichen Vollzylinders, dann müsste erwartungsgemäß  $J_S = \frac{1}{2} m (R^2 - r^2)$  erscheinen. Bei  $m$  handelt es sich aber um die geringere Masse des Hohlzylinders. Aus diesem Grund ist das Pluszeichen richtig.

Noch etwas ist verwunderlich: Die Höhe des Zylinders spielt keine Rolle. Das MTM eines Bierdeckels oder Kreissägeblatts ist ebenfalls  $J_S = \frac{1}{2} m r^2$ .

Ist ein Körper außerhalb des Schwerpunkts gelagert, z.B. im Punkt 0, vergrößert sich das Massenträgheitsmoment.



Für beliebige Körper gilt bei Drehachsen außerhalb des Schwerpunkts der STEINERSche<sup>19</sup> Satz:

$$(III.23) \quad J_0 = J_S + m e^2, \quad e : \text{Exzentrizität}$$

mit

<sup>19</sup>Jakob Steiner 1796 bis 1863, Schweizer Mathematiker

$J_0$ : Trägheitsmoment um feste Achse bei 0,

$J_S$ : Trägheitsmoment um Achse bei S,

$e$ : Abstand feste Achse zum Schwerpunkt.

Der Impulsmomentensatz für Drehung um den Schwerpunkt lautet

$$(III.24) \quad \sum M_{i[S]} = J_S \ddot{\varphi} = J_S \dot{\omega}.$$

mit

$\sum M_{i[S]}$ : Summe aller Momente um S,

$J_S$ : Massenträgheitsmoment um den selben Punkt S.

$\ddot{\varphi}$ : Winkelbeschleunigung.

Gültig für frei bewegliche Körper ([Puck auf dem Eis](#)) und im Schwerpunkt gelagerte Körper.

Bei fester Lagerung außerhalb des Schwerpunkts im Punkt 0 lautet der Impulsmomentensatz

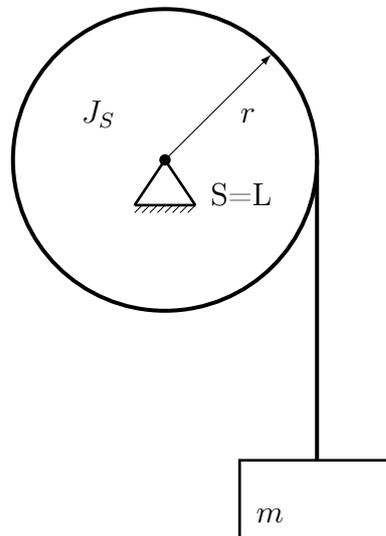
$$(III.25) \quad \sum M_{i[0]} = J_0 \ddot{\varphi} = J_0 \dot{\omega}.$$

Der Index bei  $J$  und der Momentenbezugspunkt müssen immer gleich sein. Die Bezeichnungen können variieren, z.B 0 wie Koordinatenursprung, P wie Punkt oder L wie Lager.

Hinweis: Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz müssen bei ausgedehnten Körpern erfüllt werden. Die Kräfte- und Momentengleichgewichte der Statik sind die „beschleunigungslosen“ Sonderfälle von Schwerpunktsatz und Impulsmomentensatz. ■

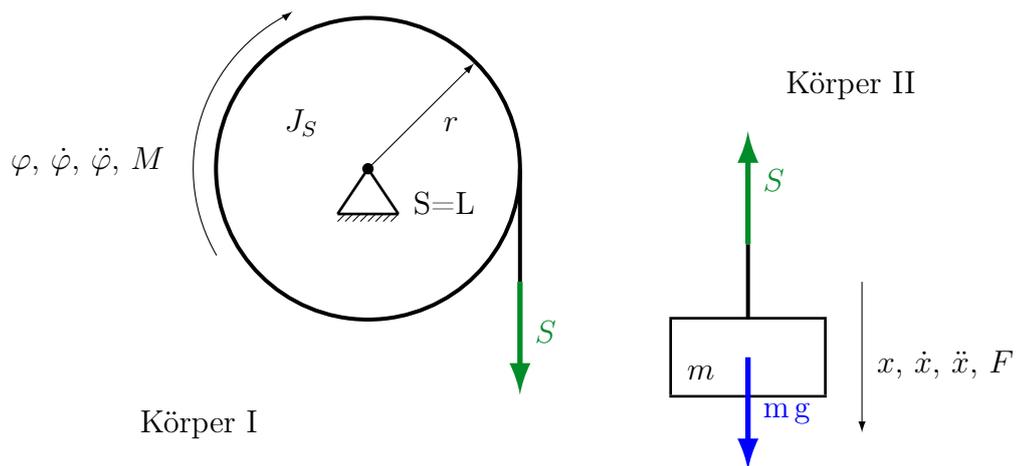
### 3.2.1. Übung, Zweikörpersystem

Gegeben ist eine reibungsfrei gelagerte Seiltrommel mit masselosem Seil und einer Last, ferner  $J_S$ ,  $m$ ,  $r$ .



Gesucht: Beschleunigung der Masse  $m$  und die Winkelbeschleunigung der Scheibe  $J_S$ .

Zerschneiden



Wichtig ist bei Mehrkörpersystemen, dass die zu erwartenden Bewegungsrichtungen kompatibel eingezeichnet werden. Die Masse wird sich nach unten bewegen, infolgedessen die Seiltrommel im Uhrzeigersinn. Erneut müssen die kinematischen Größen und die kinetischen Größen in jeweils gleicher Richtung positiv angenommen werden. Hier ist dies erkennbar an der Beschriftung  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ ,  $F$  und  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\varphi}$ ,  $M$ .

Verabschieden müssen wir uns von einer Vereinbarung aus der ebenen Statik, in der Momente gegen den Uhrzeigersinn positiv sind. Hier gilt etwas anderes: Momente in Bewegungsrichtung sind positiv.

### Hauptsätze der Körperdynamik, SwS, IMS

Körper I, IMS

$$\begin{aligned}\sum M_i[L] &= J_S \ddot{\varphi}, \\ S r &= J_S \ddot{\varphi}.\end{aligned}$$

Körper II, SwS

$$\begin{aligned}\sum F_i &= m \ddot{x}, \\ m g - S &= m \ddot{x}.\end{aligned}$$

### Kinematische Koppelung

Mehrkörpersysteme können sich nicht unabhängig voneinander bewegen. Wenn die Masse ein bestimmtes Stück Weg  $x$  zurücklegt, wird ein genau so langes Stück Seil abgewickelt. Die Scheibe muss sich also um einen dazugehörigen Winkel  $\varphi$  weiterdrehen. Der Zusammenhang zwischen Weg und Winkel ist die kinematische Koppelung. Sie lautet

$$\begin{aligned}x &= r \varphi \\ \dot{x} &= r \dot{\varphi} \\ \ddot{x} &= r \ddot{\varphi}.\end{aligned}$$

Die erste Zeile kann an Hand des Umfangs eines Kreises gut veranschaulicht werden.  $U = r \cdot 2\pi$ . Die zwei weiteren Zeilen werden durch formales Ableiten erzeugt.

### Unerwünschte Größen eliminieren, gesuchte Größen bestimmen

Nach der Seilkraft  $S$  wird nicht gefragt, sie ist zu eliminieren. Eine der beiden Beschleunigungen (hier  $\ddot{\varphi}$ ) wird auch zunächst eliminiert. Die andere Beschleunigung  $\ddot{x}$  wird

berechnet.

$$\begin{aligned}S &= \frac{J_S \ddot{\varphi}}{r} \\m g - \frac{J_S \ddot{\varphi}}{r} &= m \ddot{x} \\m g - \frac{J_S \ddot{x}}{r^2} &= m \ddot{x} \\m g &= \ddot{x} \left( m + \frac{J_S}{r^2} \right) \\\ddot{x} &= \frac{m g}{m + \frac{J_S}{r^2}} = \frac{m g r^2}{m r^2 + J_S}.\end{aligned}$$

Es ist auch nach der Winkelbeschleunigung gefragt. Mit der kinematischen Koppelung in der Form  $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$  geht das leicht vonstatten.

$$\ddot{\varphi} = \frac{m g r}{m r^2 + J_S}.$$

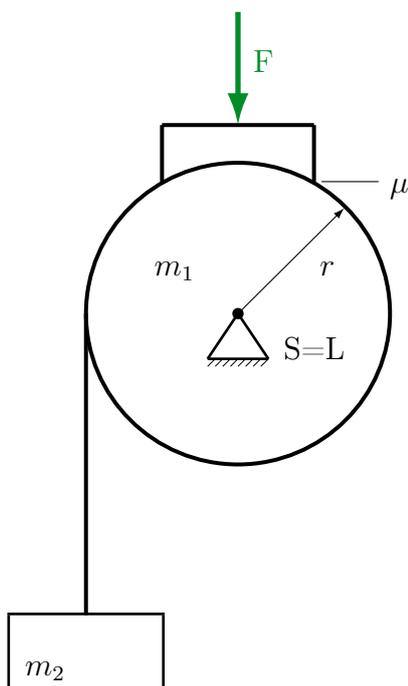
■

### 3.2.2. Übung, gebremster Förderkorb

Bei Abwärtsfahrt soll ein Förderkorb (Masse  $m_2$ ) mit bekannter Beschleunigung  $a$  aus der Ruhe auf die Endgeschwindigkeit  $v_e$  gebracht werden. Dabei wird die Seiltrommel (Vollzylinder, Masse  $m_1$ ) gebremst.

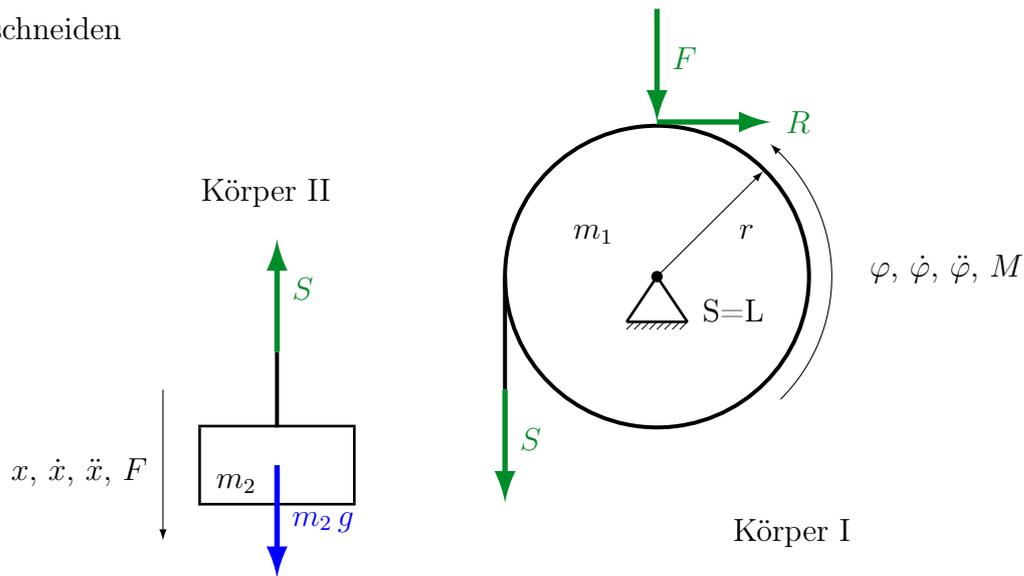
Gegeben:  $a = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $v_e = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $m_1 = 500 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2000 \text{ kg}$ ,  $r = 1,5 \text{ m}$ ,  $\mu = 0,35$

- Wie groß muss die Kraft  $F$  sein?
- Wie lange dauert die beschleunigte Fahrt?
- Wie groß muss die Kraft  $F$  sein, wenn anschließend mit  $v_e = \text{const.}$  weitergefahren wird?



**Lösung**

Zerschneiden



Hauptsätze der Körperdynamik, SwS, IMS

$$\begin{array}{ll} \text{Körper I, IMS} & \sum M_i[L] = J_S \ddot{\varphi}, \\ & S r - R r = J_S \ddot{\varphi} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Körper II, SwS} & \sum F_i = m_2 \ddot{x}, \\ & m_2 g - S = m_2 \ddot{x} \end{array}$$

$$\text{Kinematische Koppelung} \quad x = r \varphi, \quad \ddot{x} = r \ddot{\varphi}$$

$$\text{Reibung} \quad R = \mu F$$

$$\text{Massenträgheitsmoment} \quad J_S = \frac{1}{2} m_1 r^2$$

Da translatorische Größen ( $a$ ,  $v_e$ ) gegeben sind, wird  $\ddot{\varphi}$  eliminiert, ebenso die Seilkraft  $S$ , da sie uninteressant ist. Hierzu lösen wir den SwS von Körper II nach  $S$  auf.

$$S = m_2 (g - \ddot{x})$$

Diese Seilkraft  $S$  und die Kinematik in der Form  $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$  wird in den IMS von Körper I eingesetzt

$$(S - \mu F) r = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$S - \mu F = \frac{1}{2} m_1 \ddot{x}$$

$$m_2 g - m_2 \ddot{x} - \mu F = \frac{1}{2} m_1 \ddot{x}$$

a) Wie groß ist  $F$  bei  $\ddot{x} = a = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ?

$$\mu F = m_2 g - \ddot{x} \left( \frac{1}{2} m_1 + m_2 \right)$$

$$F = \frac{m_2 g}{\mu} - \frac{\ddot{x}}{\mu} \left( \frac{1}{2} m_1 + m_2 \right)$$

$$F = 36,7 \text{ kN.}$$

b) Wie lange dauert die beschleunigte Fahrt?

$$\ddot{x} = a = \text{const.}$$

$$1 \text{ mal int. reicht } \quad \dot{x} = a t + c_1$$

$$\text{AB} \quad \dot{x}(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$\text{tats. BewGl.} \quad \dot{x} = a t$$

$$\text{EB} \quad \dot{x}(t=T) = v_e$$

$$T \text{ best.} \quad T = \frac{v_e}{a}$$

$$T = 4 \text{ s.}$$

c) Wie groß ist  $F$  bei Fahrt mit  $\dot{x} = v_e = \text{const}$ ?

Was glauben Sie, wird die Kraft größer oder kleiner werden?

Wenn mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wird, ist die Beschleunigung  $\ddot{x} = 0$ .

$$F = \frac{m_2 g}{\mu} - \frac{\ddot{x}}{\mu} \left( \frac{1}{2} m_1 + m_2 \right)$$

$$F = \frac{m_2 g}{\mu}$$

$$F = 56,1 \text{ kN.}$$

Na klar, wenn der Förderkorb nicht noch schneller werden soll, muss stärker gebremst werden,  $F$  wird größer.

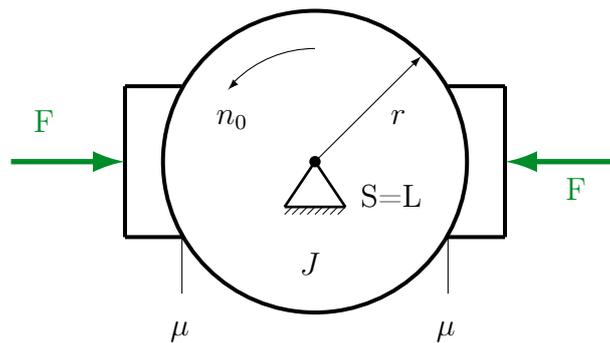


### 3.2.3. Übung, Wäscheschleuder

Aus Sicherheitsgründen wird eine Wäscheschleuder so abgebremst, dass sie nach einer Sekunde zum Stillstand kommt.

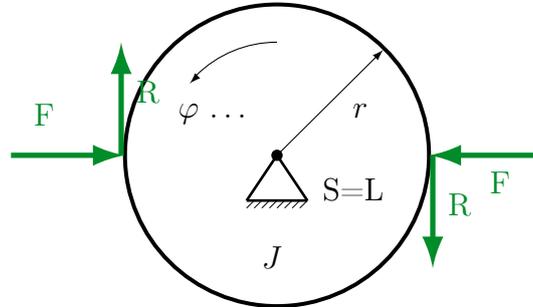
- Wie groß muss  $F$  bei einer Drehzahl  $n_0$  sein?
- Wieviele Umdrehungen werden beim Bremsvorgang ausgeführt?

Gegeben:  $n_0 = 1000 \text{ U/min}$ ,  $r = 0,2 \text{ m}$ ,  $J = 0,4 \text{ kg m}^2$ ,  $\mu = 0,35$ .



**Lösung**

Freischneiden

a) Wie groß ist  $F$ ?

Hauptsatz der Körperdynamik, IMS

$$\sum M_i[L] = J_S \ddot{\varphi},$$

$$-2 R r = J_S \ddot{\varphi} \quad \text{mit} \quad R = \mu F$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2 \mu F r}{J_S} = \alpha$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2 \mu F r}{J_S} = \text{const.}$$

$$2 \text{ mal int.} \quad \dot{\varphi} = -\frac{2 \mu F r}{J_S} t + c_1$$

$$\varphi = -\frac{\mu F r}{J_S} t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\text{AB1} \quad \dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 = 2\pi \frac{n_0}{60}$$

$$\text{AB2} \quad \varphi(t=0) = 0$$

$$c_{1,2} \text{ best.} \quad c_1 = \frac{\pi n_0}{30}, \quad c_2 = 0$$

$$\text{tats. BewGl.} \quad \dot{\varphi} = -\frac{2\mu F r}{J_S} t + \frac{\pi n_0}{30}$$

$$\varphi = -\frac{\mu F r}{J_S} t^2 + \frac{\pi n_0}{30} t$$

$$\text{EB1} \quad \dot{\varphi}(t = T) = 0$$

$$\text{EB2} \quad \varphi(t = T) = \varphi_e = ?$$

$$T \text{ best. (hier EB1)} \quad 0 = -\frac{2\mu F r}{J_S} T + \frac{\pi n_0}{30}$$

$$T = \frac{\pi n_0 J_S}{60 \mu F r}$$

$$F \text{ ist gesucht, bei } T = 1 \text{ s} \quad F = \frac{\pi n_0 J_S}{60 \mu T r}$$

$$F = 300 \text{ N.}$$

b) Wieviele Umdrehungen werden zurückgelegt? Wir fragen zunächst nach dem zurückgelegten Winkel  $\varphi_e$ .

$$\varphi_e = -\frac{\mu F r}{J_S} T^2 + \frac{\pi n_0}{30} T$$

$$F \text{ eingesetzt} \quad \varphi_e = -\frac{\mu r \pi n_0 J_S}{60 \mu T r J_S} T^2 + \frac{\pi n_0}{30} T$$

$$\varphi_e = -\frac{\pi n_0}{60} T + \frac{\pi n_0}{30} T$$

$$\varphi_e = \frac{\pi n_0}{60} T$$

$$\varphi_e = 52,3 \text{ Bogenmaß!}$$

Die Zahl der Umdrehungen ist

$$\frac{52,3}{2\pi} = 8,3 \text{ Umdrehungen}$$



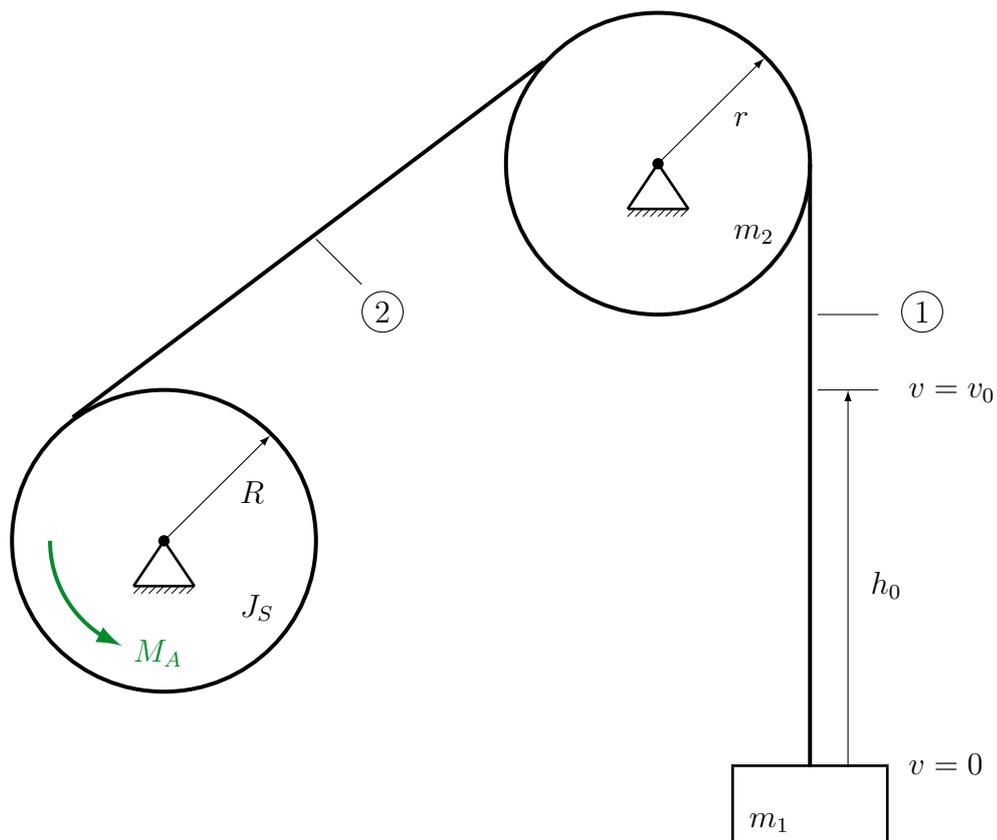
**3.2.4. Übung, Förderkorb, Seilkräfte**

Ein Förderkorb fährt zu Tage. Er wird mit konstanter Beschleunigung auf einer Strecke  $h_0$  auf  $v_0$  beschleunigt.

Gegeben:  $h_0$ ,  $v_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  (Vollscheibe),  $r$ ,  $R$ ,  $J_S$

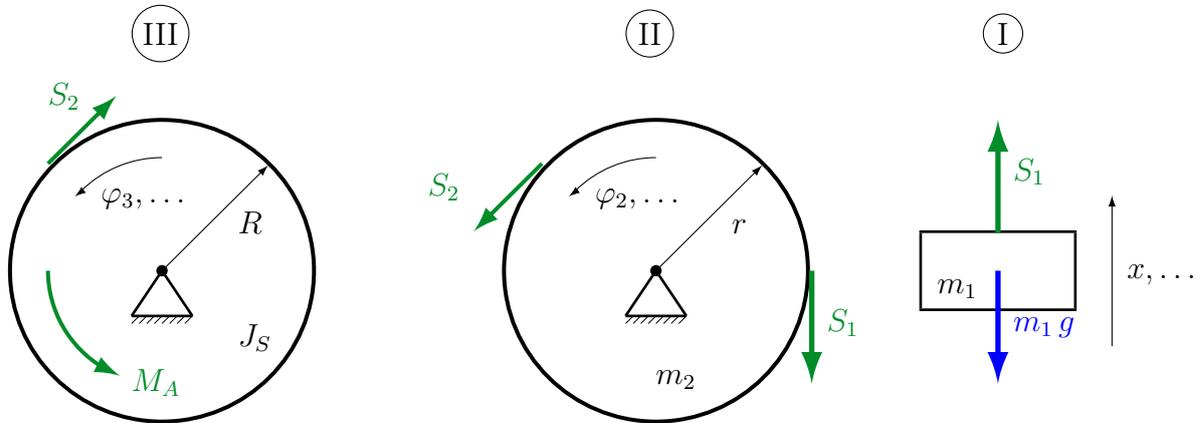
a) Wie groß ist die Seilkraft ①

b) Wie groß ist die Seilkraft ②



## Lösung

Freischneiden



Hauptsätze der Körperdynamik

$$\text{Körper I, SwS} \quad S_1 - m_1 g = m_1 \ddot{x}$$

$$\text{Körper II, IMS} \quad S_2 r - S_1 r = \frac{1}{2} m_2 r^2 \ddot{\varphi}_2$$

$$\text{Körper III, IMS} \quad M_A - S_2 R = J_S \ddot{\varphi}_3$$

Kinematische Koppelung

$$x = r \varphi_2 = R \varphi_3; \quad \ddot{x} = r \ddot{\varphi}_2 = R \ddot{\varphi}_3$$

Um die Seilkräfte angeben zu können müssen die (Winkel-)Beschleunigungen bekannt sein. Informationen über translatorische Wege und Geschwindigkeiten liegen vor, daher ist  $\ddot{x}$  von primärem Interesse.

$$\ddot{x} = a = \text{const.}$$

$$\dot{x} = a t + c_1$$

$$x = \frac{a}{2} t^2 + c_1 t + c_2$$

$$\text{AB1} \quad \dot{x}(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$\text{AB2} \quad x(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0$$

|                          |                                       |
|--------------------------|---------------------------------------|
| tats. BewGl.             | $\dot{x} = a t$                       |
|                          | $x = \frac{a}{2} t^2$                 |
| EB1                      | $\dot{x}(t = T) = v_0$                |
| EB2                      | $x(t = T) = h_0$                      |
| T best. EB1              | $T = \frac{v_0}{a}$                   |
| ges. Größe $a$ bestimmen | $h_0 = \frac{a}{2} T^2$               |
|                          | $h_0 = \frac{a}{2} \frac{v_0^2}{a^2}$ |
|                          | $a = \frac{v_0^2}{2 h_0} = \ddot{x}$  |

Aus Körper I ist die Seilkraft  $S_1$  berechenbar.

$$S_1 = m_1 (\ddot{x} + g)$$

$$S_1 = m_1 \left( \frac{v_0^2}{2 h_0} + g \right)$$

Aus Körper II ist die Seilkraft  $S_2$  berechenbar. Hierzu muss  $\ddot{\varphi}_2$  eliminiert werden.

$$S_2 r - S_1 r = \frac{1}{2} m_2 r^2 \ddot{\varphi}_2$$

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{2} m_2 r \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} m_2 \ddot{x} + m_1 (\ddot{x} + g)$$

$$S_2 = \left( \frac{1}{2} m_2 + m_1 \right) \ddot{x} + m_1 g$$

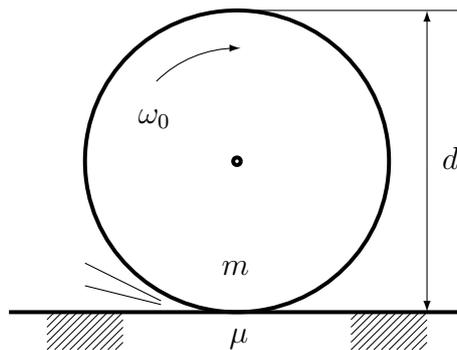
$$S_2 = \left( \frac{1}{2} m_2 + m_1 \right) \frac{v_0^2}{2 h_0} + m_1 g.$$

Aus Körper III könnte das noch unbekannte Antriebsmoment  $M_A$  berechnet werden. Danach ist aber nicht gefragt. ■

### 3.2.5. Übung, Grinding disk goes berserk

Eine homogene Schleifscheibe (Durchmesser  $d$ ) löst sich bei einer Kreisfrequenz  $\omega_0$  von der Welle und fällt senkrecht zu Boden. Wir nehmen an, dass die Scheibe beim Aufprall nicht springt (Gleitreibung  $\mu$ ). Gegeben:  $d = 300 \text{ mm}$ ,  $\omega_0 = 90 \frac{1}{\text{s}}$ ,  $\mu = 0,5$ , Masse  $m$  beliebig.

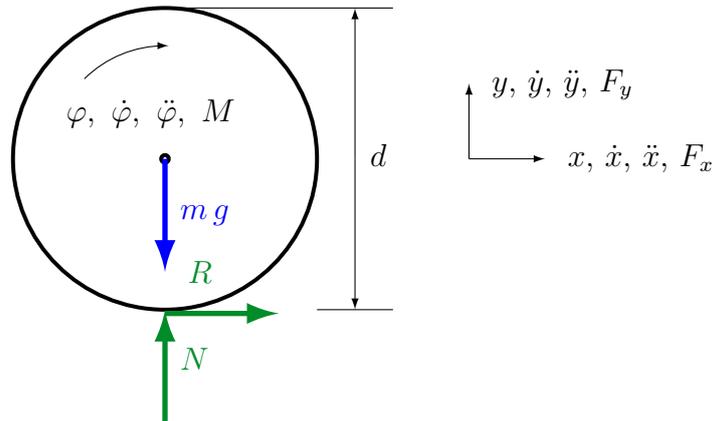
Welche Geschwindigkeit  $v_1$  erreicht der Schwerpunkt der Scheibe auf horizontaler Ebene?



**Lösung**

Die Scheibe wird kurzzeitig auf der Stelle rotieren, Reibkräfte werden wirken und die Scheibe wird sich alsbald translatorisch beschleunigt bewegen. Gleichzeitig wird die Winkelgeschwindigkeit abnehmen. Zu einem späteren Zeitpunkt wird die Scheibe in reines Rollen übergehen. Dann ist die gesuchte Geschwindigkeit  $v_1$  erreicht.

Freischneiden



Hauptsätze der Körperdynamik. In diesem Fall hat ein Körper sowohl eine translatorische als auch eine rotatorische Bewegung.

$$y\text{-Richtung, SwS} \quad N - m g = m \ddot{y} = 0 \quad (\text{kein Springen})$$

$$N = m g, \quad R = \mu m g$$

$$x\text{-Richtung, SwS} \quad R = m \ddot{x}$$

$$\mu m g = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \mu g$$

$$\text{IMS} \quad -R \frac{d}{2} = \frac{1}{2} m \frac{d^2}{4} \ddot{\varphi}$$

$$-\mu g = \frac{d}{4} \ddot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{4\mu g}{d}$$

Nicht zu fassen, eine Reibkraft treibt etwas an. Manchmal ist das wirklich der Fall.

## Kinematik

$$\ddot{x} = \mu g \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{4\mu g}{d}$$

$$\dot{x} = \mu g t + c_1 \qquad \dot{\varphi} = -\frac{4\mu g}{d} t + c_3$$

$$x = \frac{\mu g}{2} t^2 + c_1 t + c_2 \qquad \varphi = -\frac{4\mu g}{2d} t^2 + c_3 t + c_4$$

$$\text{AB1} \quad \dot{x}(t=0) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \qquad \dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 \rightarrow c_3 = \omega_0$$

$$\text{AB2} \quad x(t=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \qquad \varphi(t=0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

$$\text{tats. BewGl.} \quad \dot{x} = \mu g t \qquad \dot{\varphi} = -\frac{4\mu g}{d} t + \omega_0$$

$$x = \frac{\mu g}{2} t^2 \qquad \varphi = -\frac{4\mu g}{2d} t^2 + \omega_0 t$$

Den Endbedingungen kommt nun eine besondere Bedeutung zu. Wenn ein rotierender Körper rollt (und nicht rutscht/durchdreht), haben translatorische Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit ein Verhältnis zueinander, das wir als kinematische Koppelung kennen.

$$\dot{x}(t=T) = \frac{d}{2} \dot{\varphi}(t=T) = v_1$$

Das erinnert ein wenig an eine Übergangsbedingung bei der Balkenbiegung. Es geht hier auch um einen Übergang, den vom Durchdrehen zum Rollen.

$$T \text{ bestimmen} \quad \mu g T = \frac{d}{2} \left( -\frac{4\mu g}{d} T + \omega_0 \right)$$

$$\mu g T + 2\mu g T = \frac{d}{2} \omega_0$$

$$T = \frac{\omega_0 d}{6\mu g}$$

Mit der Zeit  $T$  kann mittels  $\dot{x}(t=T) = v_1$  die gesuchte Größe  $v_1$  ausgerechnet werden.

$$v_1 = \mu g T$$

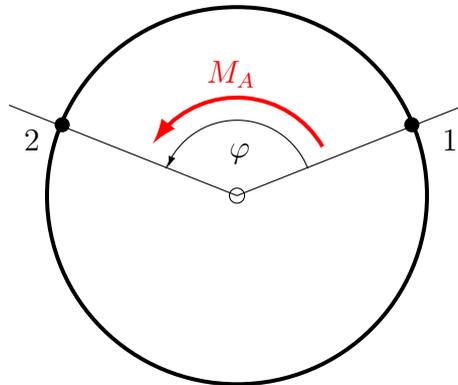
$$v_1 = \mu g \frac{\omega_0 d}{6\mu g}$$

$$v_1 = \frac{\omega_0 d}{6}, \quad v_1 = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

■

### 3.3. Arbeit und Leistung bei rotatorischen Bewegungen

Zur Vereinfachung werden Bewegungen mit konstanten Antriebsmomenten betrachtet. In Analogie zu Gleichung III.15 auf Seite 236 berechnet sich die Arbeit bei einer rotatorischen Bewegung vom Zustand 1 zum Zustand 2



$$(III.26) \quad W_{M1 \rightarrow 2} = \pm M_A \varphi$$

mit

$$W_{M1 \rightarrow 2} = +M_A \varphi, \text{ wenn } M_A \text{ und } \varphi \text{ gleichsinnig und}$$

$$W_{M1 \rightarrow 2} = -M_A \varphi, \text{ wenn } M_A \text{ und } \varphi \text{ gegensinnig.}$$

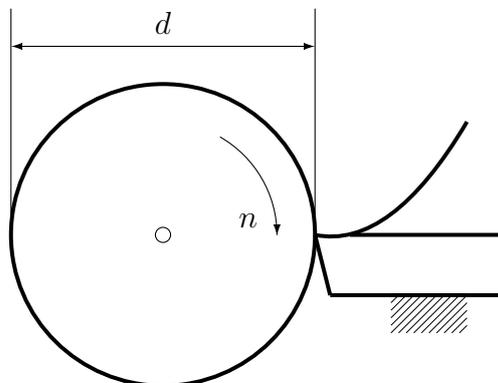
Die Leistung  $P$  berechnet sich bei konstanter Winkelgeschwindigkeit zu

$$(III.27) \quad P = M \omega = M \frac{\pi n}{30} \approx \frac{M n}{10}.$$

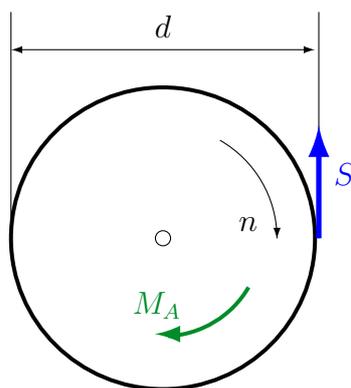
Siehe auch Gleichungen III.18 auf Seite 243 und III.9 auf Seite 219. ■

### 3.3.1. Übung, Schnittleistung

An einem Werkstück mit Durchmesser  $d = 60$  mm wird gedreht. Die Schnittkraft beträgt  $1,8$  kN. Wie groß ist die Schnittleistung bei einer Drehzahl von  $n = 250$  1/min?



#### Lösung



$$\text{IMS} \quad M_A - S \frac{d}{2} = J\dot{\varphi} = 0, \quad \text{da } n = \text{const.}$$

$$M_A = S \frac{d}{2}$$

$$\text{Leistung} \quad P = M\omega = S \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi n}{30}$$

$$P = \frac{1800 \cdot 0,06 \cdot \pi \cdot 250}{60} \frac{\text{N m}}{\text{s}} = \text{W}$$

$$P = 1,41 \text{ kW}$$



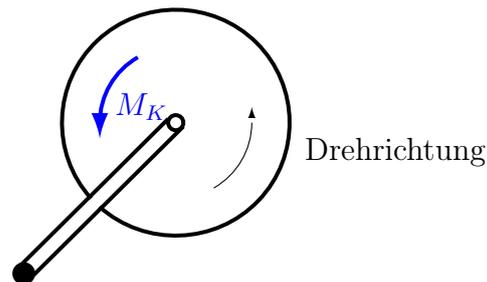
### 3.3.2. Übung, Arbeit an der Kurbel

An einer Seilwinde mit Handkurbel wirkt ein Kurbelmoment  $M_K$  von 45 Nm. Es werden  $m = 127,5$  Umdrehungen gemacht, dabei wird die Last um die Strecke  $x = 25$  m angehoben. Es treten keine nennenswerten Beschleunigungen auf. Wie groß ist

- die Dreharbeit an der Kurbel,
- der Betrag der Seilkraft?

#### Lösung

a)



$$\begin{aligned} \text{Kurbelarbeit} \quad W_K &= M_K \varphi = M_K m \cdot 2\pi \\ W_K &= 45 \cdot 127,5 \cdot 2\pi \text{ Nm} \\ W_K &= 36,1 \text{ kJ.} \end{aligned}$$

b)

$$W_{\text{Kurbel}} + W_{\text{Seil}} = 0$$

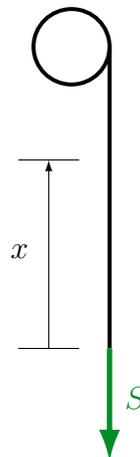
$$M_K \varphi + x(-S_1) = 0$$

$$S = \frac{M_K \varphi}{x}$$

$$S = \frac{M_K m \cdot 2\pi}{x}$$

$$S = \frac{45 \cdot 127,5 \cdot 2\pi}{25} \text{ N}$$

$$S = 1,44 \text{ kN.}$$



■

### 3.3.3. Übung, Lokschuppendrehscheibe

Eine Lokschuppendrehscheibe dreht sich in 40 s um  $180^\circ$ . Zur Überwindung der Reibung ist ein Drehmoment von 30 000 Nm nötig.

Wie groß ist die Antriebsleistung?

#### Lösung

$$\text{Leistung} \quad P = M \omega$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{hier} \quad \omega = \frac{\varphi}{t}$$

$$P = M \frac{\varphi}{t}$$

$$\text{Bogenmaß!} \quad P = 30 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi}{40} \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

$$P = 2,36 \text{ kW.}$$



### 3.4. Arbeitssatz bei Drehung um eine feste Achse

Analog zu den Gleichungen III.19 auf Seite 246 kann der Arbeitssatz für Drehbewegungen hergeleitet werden.

$$(III.28) \quad W_{M1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} J_D \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_D \omega_1^2.$$

mit

$W_{M1 \rightarrow 2}$ : Arbeit eines Moments bei einer Verdrehung um eine feste Achse von Zustand 1 zu Zustand 2,

$\omega_1$ : Winkelgeschwindigkeit beim Zustand 1,

$\omega_2$ : Winkelgeschwindigkeit beim Zustand 2.

oder kurz

$$(III.29) \quad W_{M1 \rightarrow 2} = E_{\text{kin rot2}} - E_{\text{kin rot1}}.$$

■

### 3.4.1. Übung, Wäscheschleuder mit Arbeitssatz

Aus Sicherheitsgründen wird eine Wäscheschleuder so abgebremst, dass sie nach einer Umdrehung zum Stillstand kommt.

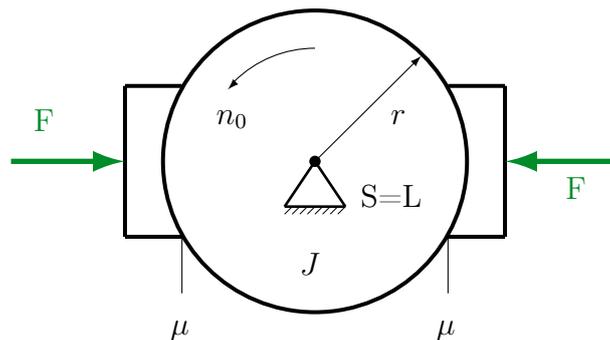
Wie groß muss  $F$  bei einer Drehzahl  $n_0$  sein?

Eine ganz ähnliche Aufgabe wurde schon als Übungsaufgabe 3.2.3 auf Seite 260 mittels IMS gelöst.

Die damalige Forderung lautete, dass die Wäscheschleuder nach einer Sekunde zum Stillstand kommt. Da im Arbeitssatz keine Zeiten  $t$  auftauchen, wird die Fragestellung für den Arbeitssatz angepasst.

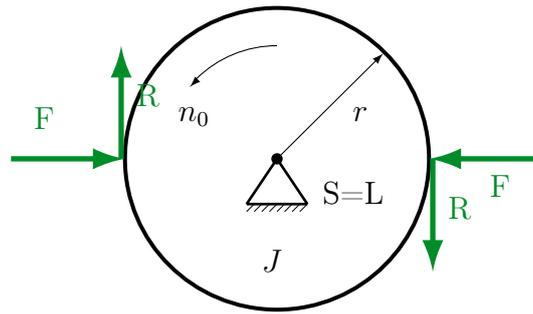
Merke: SwS und IMS gelingen immer und liefern Ergebnisse für alle Lebenslagen. Wenn nach Wegen/Winkeln, Kräften/Momenten und/oder (Winkel-)Geschwindigkeiten gefragt wird, liefert der Arbeitssatz einen schnelleren Rechenweg.

Gegeben:  $n_0 = 1000 \text{ U/min}$ ,  $r = 0,2 \text{ m}$ ,  $J = 0,4 \text{ kg m}^2$ ,  $\mu = 0,35$ .



## Lösung

Freischneiden



$$\text{Arbeitssatz} \quad W_{M1 \rightarrow 2} = E_{\text{kin rot}2} - E_{\text{kin rot}1} \\ M \varphi = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

Es wirken die Momente  $R r$  an zwei Stellen, entgegen der Drehrichtung. Es wird eine Umdrehung ( $\varphi = 2\pi$ ) zurückgelegt.

$$W_{M1 \rightarrow 2} = -2 R r \cdot 2\pi$$

$$R = \mu N = \mu F$$

$$W_{M1 \rightarrow 2} = -4 \mu F r \pi$$

$$\text{Position 1:} \quad \omega_1 = \frac{\pi n_0}{30}$$

$$\text{Position 2:} \quad \omega_2 = 0 \quad (\text{Stillstand})$$

$$E_{\text{kin rot}2} = \frac{1}{2} J \cdot 0 = 0$$

$$E_{\text{kin rot}1} = \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \frac{1}{2} J \frac{\pi^2 n_0^2}{30^2}$$

$$\text{in Arbeitssatz} \quad -4 \mu F r \pi = 0 - \frac{1}{2} J \frac{\pi^2 n_0^2}{30^2}$$

$$F = \frac{J \pi^2 n_0^2}{4 \mu r \pi \cdot 2 \cdot 30^2}$$

$$F = \frac{0,4 \cdot \pi \cdot 1000^2}{4 \cdot 0,35 \cdot 0,2 \cdot 2 \cdot 30^2} \text{ N}$$

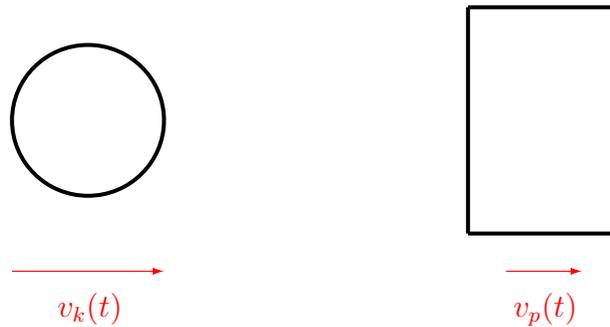
$$F = 2493 \text{ N}$$

■

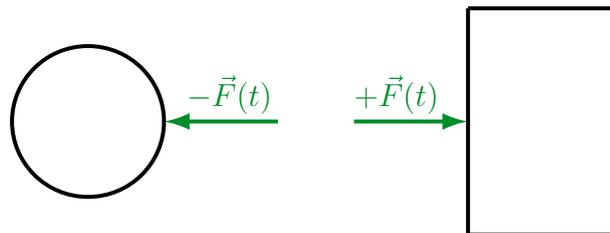
## 4. Stoßvorgänge

Beim Zusammenprall zweier Körper entstehen sehr schnell Deformationen, die vorübergehend oder bleibend sein können. Dabei treten erheblich Kräfte auf, deren zeitliche Verläufe i. A. nicht bekannt sind.

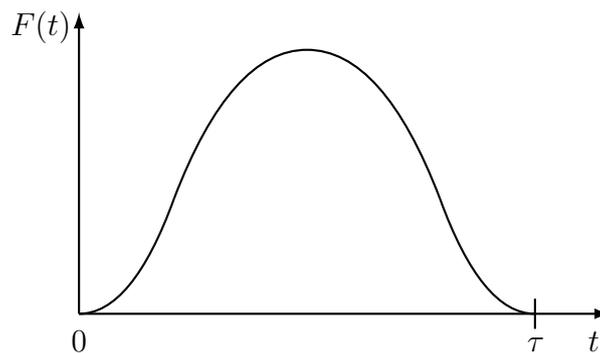
Beispiel: Eine Kugel prallt auf eine Platte. Beide Körper können Geschwindigkeiten  $v$  haben.



Während des Kontakts wird das System zerschnitten.



Kraftverlauf von  $|\vec{F}(t)| = F(t)$ :



$t = 0$ : Zeitpunkt unmittelbar vor dem Stoßkontakt

$t = \tau$ : Zeitpunkt unmittelbar nach Ablauf des Stoßvorgangs. Die Körper können sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten oder mit einer gemeinsamen weiterbewegen (noch zu klären). Die Fläche unter der Stoßkurve berechnet sich zu

$$S = \int_0^{\tau} F(t) dt \quad \text{mit } \tau: \text{Stoßzeit.}$$

$F(t)$  bzw.  $\vec{F}(t)$  sind i.A. nicht bekannt. Es genügt das Integral der Kraft zu betrachten. Hierzu wird die vektorielle Größe Stoßantrieb  $\vec{S}$  vereinbart

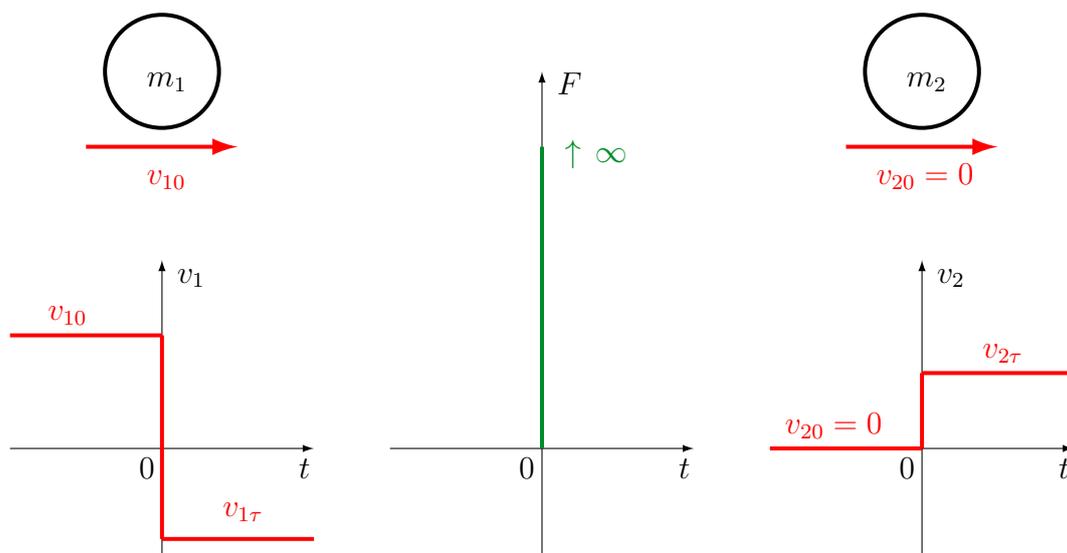
$$(III.30) \quad \vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F}(t) dt$$

$\tau$  ist typischerweise sehr klein, die Kräfte  $F(t)$  bzw.  $\vec{F}(t)$  sehr groß. Es wird vereinfachend angenommen dass  $\tau$  gegen Null strebt und die Größe

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \vec{F}(t) dt \quad \text{endlich ist.}$$

Bei dem hier angesprochenen Problem „Null mal Unendlich“ sind prinzipiell alle Ergebnisse möglich. Von Null über endliche Werte bis Unendlich. Hier ist ein endlicher Wert zu erwarten.

Folge: Die Körper behalten während des Stoßes ( $0 \leq t \leq \tau$ ) ihre Lage bei, ihre Geschwindigkeiten ändern sich unstetig.



Indizierung der Geschwindigkeiten  $v_{10}, v_{1\tau}, v_{20}, v_{2\tau}$ .

erster Index: Körper

zweiter Index: 0 unmittelbar vor dem Stoß,  $\tau$  unmittelbar nach dem Stoß.

Zur weiteren Betrachtung wird der Impulssatz (s. Gleichung III.22 auf Seite 250) benötigt.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

Nebenbemerkung: Bei starren Körpern mit konstanter Masse wird daraus

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}_S}{dt} = m \vec{a}_S$$

$$\dim [I, \vec{I}] = \frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}}, \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}} = 1 \text{ Ns}$$

Durch formale Integration über die Stoßdauer  $\tau$  folgt

$$\int_0^\tau \vec{F}(t) dt = \int_0^\tau \frac{d\vec{I}}{dt} dt = \int_0^\tau d\vec{I} = \vec{I}(t = \tau) - \vec{I}(t = 0).$$

Mit der Definition des Stoßantriebs s. Gl. III.30 auf der vorherigen Seite gilt

$$\vec{S} = \int_0^\tau m \frac{d\vec{v}_S}{dt} dt = m [\vec{v}_S(t = \tau) - \vec{v}_S(t = 0)].$$

Zusammengefasst

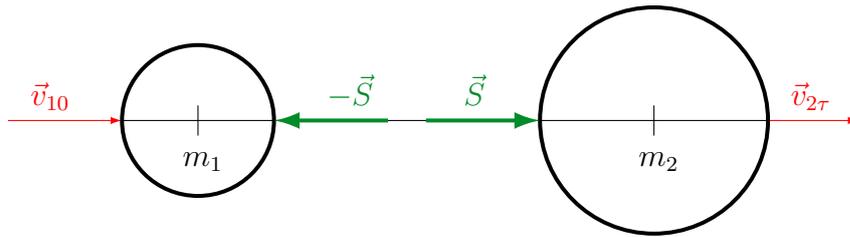
$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{I}(\tau) - \vec{I}(0) \\ \text{(III.31)} \quad \vec{S} &= m [\vec{v}_S(\tau) - \vec{v}_S(0)]. \end{aligned}$$

$v_S$  beschreibt die Schwerpunktgeschwindigkeit eines Körpers. Der Hinweis auf den Schwerpunkt wird, weil selbstverständlich, alsbald weggelassen.

Stoßantriebe  $\vec{S}$  zwischen zwei Körpern werden mit der gleichen Methodik freigelegt, wie Kräfte. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{(III.32)} \quad \text{Körper 1:} \quad -\vec{S} &= m_1 (\vec{v}_{1\tau} - \vec{v}_{10}), \\ \text{Körper 2:} \quad \vec{S} &= m_2 (\vec{v}_{2\tau} - \vec{v}_{20}) \end{aligned}$$

Vereinfachend wird hierbei angenommen, dass die Wirkungslinien der Stoßantriebe  $\vec{S}$  und die Richtungen der von Null verschiedenen Geschwindigkeiten  $\vec{v}_{xy}$  mit der Verbindungslinie der Schwerpunkte zusammenfällt.



Bei einem solchen geraden, zentrischen Stoß können keine Drehbewegungen entstehen.

Die Gleichungen III.32 auf der vorherigen Seite können zu einer Gleichung, der Impulserhaltung zusammengefasst werden

$$(III.33) \quad m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}.$$

#### 4.1. Völlig elastischer Stoß

Die kinetischen Energien der beiden Körper bleiben erhalten

$$(III.34) \quad E_{\text{kin}1\tau} + E_{\text{kin}2\tau} = E_{\text{kin}10} + E_{\text{kin}20}$$

Ein vollkommen elastischer Flummi erreicht nach dem Stoß exakt die Höhe, aus der er losgelassen wurde. Die Realität ist ein wenig anders.

#### 4.2. Völlig unelastischer Stoß

Die Körper trennen sich nach dem Stoß nicht mehr, ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind gleich.

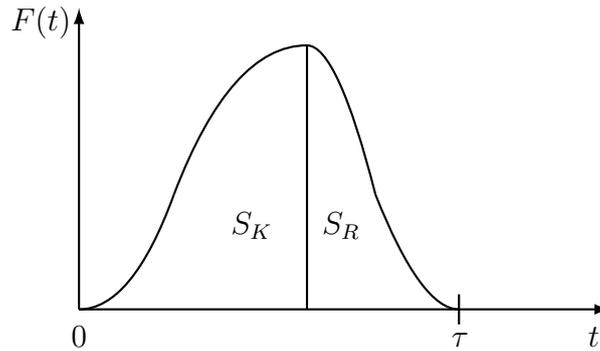
$$(III.35) \quad v_{1\tau} = v_{2\tau}$$

Ein fallengelassener Klumpen aus Plastilin (Knetgummi) spring gar nicht hoch. Die Erde und der Klumpen haben nach dem Stoß eine gemeinsame Geschwindigkeit.

#### 4.3. Teilelastischer (realer) Stoß

Definition einer experimentell zu ermittelnden Stoßzahl  $\kappa$  (kappa).

$$\kappa = \frac{S_R}{S_K}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1$$



$S_K$ : Stoßantrieb der Kompressionsphase,

$S_R$ : Stoßantrieb der Restitutionsphase,

Es gilt

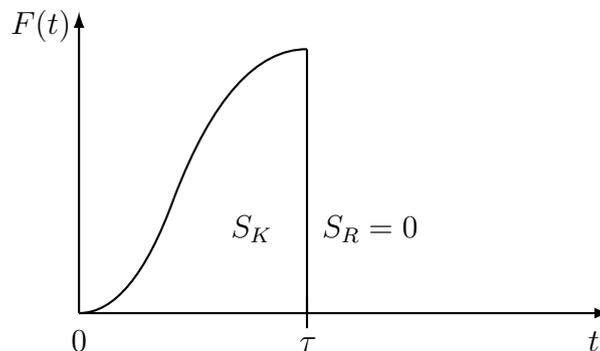
$$S_K + S_R = S = \int_0^{\tau} F(t) dt$$

Bei einem vollkommen elastischen Stoß gilt

$$\kappa = 1; \quad S_K = S_R$$

Bei einem vollkommen unelastischen Stoß gilt

$$\kappa = 0; \quad S_R = 0$$



Es gilt beim geraden zentrischen Stoß

$$(III.36) \quad \kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1.$$

Reale Stöße sind immer teilelastisch. Die beiden idealen Stoßarten können mit diesem Kalkül auch abgebildet werden.

## 4.4. Zusammenfassung

Beim geraden, zentrischen Stoß gilt immer:

### 1) Die Impulserhaltung

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}$$

sowie eine zweite Bedingung, die von der Stoßart abhängig ist.

### 2a) Vollkommen elastischer Stoß: Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\tau}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\tau}^2$$

### 2b) Vollkommen unelastischer Stoß: Die Körper bleiben beieinander

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}$$

### 2c) Teilelastischer (realer) Stoß: Stoßzahl $\kappa$

$$\kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1$$

Wer die Energieerhaltung des vollkommen elastischen Stoßes scheut, kann die Bedingung des teilelastischen Stoßes anwenden. Es gilt dann  $\kappa = 1$ . ■

## 4.4.1. Übung, Stoß zweier Klötze



Gegeben:  $v_{10} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $m_1 = 100 \text{ g}$ ,  $m_2 = 20 \text{ g}$ .

Gesucht:  $v_{20}$  damit Körper 1 nach dem Stoß zum Stillstand kommt ( $v_{1\tau} = 0$ ) bei

- vollkommen unelastischem Stoß,
- vollkommen elastischem Stoß,
- realem Stoß mit  $\kappa = 0,7$ .

**Lösung**

Bei Stoßvorgängen gilt immer die Impulserhaltung

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}$$

In dieser Aufgabe gilt für alle drei Fragestellungen  $v_{1\tau} = 0$ . Somit vereinfacht sich die Impulserhaltung zu

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_2 v_{2\tau}$$

a) vollkommen unelastischer Stoß

$$\begin{array}{ll} \text{es gilt} & v_{1\tau} = v_{2\tau} \\ \text{hier daher} & v_{1\tau} = 0, \quad v_{2\tau} = 0 \\ \text{in Impulserhaltung} & m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = 0 \\ v_{20} \text{ ist gefragt} & v_{20} = -\frac{m_1}{m_2} v_{10} \\ & v_{20} = -2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{array}$$

b) vollkommen elastischer Stoß

$$\begin{array}{ll} \text{es gilt} & \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\tau}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\tau}^2 \\ \text{hier mit } v_{1\tau} = 0 & m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2 = m_2 v_{2\tau}^2 \end{array}$$

Es bleiben die Unbekannten  $v_{20}$  und  $v_{2\tau}$ . Letztere ist uninteressant und wird daher eliminiert.

$$\begin{array}{ll} \text{Impulserhaltung} & v_{2\tau} = \frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20} \\ \text{Energieerhaltung} & m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2 = m_2 v_{2\tau}^2 \\ & \frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 + v_{20}^2 = v_{2\tau}^2 \\ v_{2\tau} \text{ einsetzen} & \frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 + v_{20}^2 = \left( \frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20} \right)^2 \\ & \frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 + v_{20}^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2} v_{10}^2 + v_{20}^2 + 2 \frac{m_1}{m_2} v_{10} v_{20} \\ & \frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2} v_{10}^2 + 2 \frac{m_1}{m_2} v_{10} v_{20} \quad \left| \cdot \frac{m_2}{m_1} \right. \end{array}$$

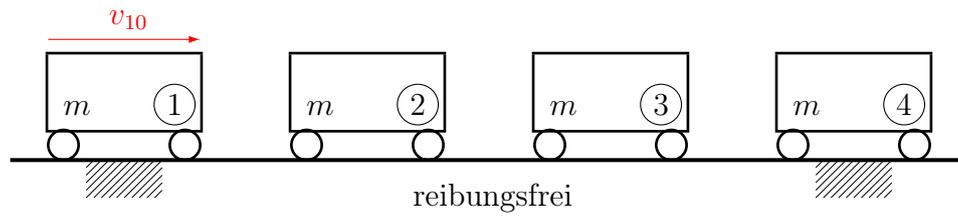
$$\begin{aligned}
 v_{10}^2 &= \frac{m_1}{m_2} v_{10}^2 + 2 v_{10} v_{20} & | : v_{10} \\
 v_{10} &= \frac{m_1}{m_2} v_{10} + 2 v_{20} \\
 2 v_{20} &= v_{10} - \frac{m_1}{m_2} v_{10} \\
 v_{20} &= \frac{1}{2} v_{10} \left( 1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \\
 v_{20} &= -1,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.
 \end{aligned}$$

c) realer Stoß,  $\kappa = 0,7$

$$\begin{aligned}
 \text{erneut Impulserhaltung} & \quad v_{2\tau} = \frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20} \\
 \text{realer Stoß} & \quad \kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}} \\
 \text{mit } v_{1\tau} = 0 & \quad \kappa = -\frac{v_{2\tau}}{v_{20} - v_{10}} \\
 \text{einsetzen} & \quad \kappa = -\frac{\frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20}}{v_{20} - v_{10}} \\
 \text{nach } v_{20} & \quad \kappa (v_{20} - v_{10}) = -\left( \frac{m_1}{m_2} v_{10} + v_{20} \right) \\
 & \quad \kappa v_{20} + v_{20} = -\frac{m_1}{m_2} v_{10} + \kappa v_{10} \\
 & \quad v_{20} (\kappa + 1) = v_{10} \left( \kappa - \frac{m_1}{m_2} \right) \\
 & \quad v_{20} = v_{10} \frac{\kappa - \frac{m_1}{m_2}}{\kappa + 1} \\
 & \quad v_{20} = -1,265 \frac{\text{m}}{\text{s}}.
 \end{aligned}$$

Die Aufgabenteile a) und b) sind bei vorhandener Lösung für c) ein Kinderspiel. Bei Aufgabenteil a) gilt  $\kappa = 0$  und bei Aufgabenteil b) gilt  $\kappa = 1$ . Probieren Sie es aus! Wenn alle drei Fälle gefragt sind, so berechnen Sie den realen Stoß als erstes und wenden anschließend diesen Trick an. ■

## 4.4.2. Übung, vier Eisenbahnwagen



Vier gleiche Eisenbahnwagen stehen auf ebener Schiene. Wagen ① stößt mit  $v_{10}$  auf den ruhenden Wagen ②. Weitere Stöße folgen. Wie groß ist zum Schluss  $v_{4r}$ , wenn alle Stöße

- vollkommen unelastisch,
- vollkommen elastisch,
- teilelastisch mit Stoßzahl  $\kappa$  sind?

Auf Grund der schlechten Erfahrung in der letzten Aufgabe werden wir als erstes den Aufgabenteil c) behandeln. Wenn dieses Ergebnis vorliegt, werden die Aufgabenteile a) und b) im Handumdrehen erledigt.

**Lösung**

Bei Stoßvorgängen gilt immer die Impulserhaltung

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}.$$

Bei teilelastischen (realen) Stößen gilt

$$\kappa = -\frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{20} - v_{10}}, \quad 0 \leq \kappa \leq 1.$$

Gesucht ist  $v_{2\tau}$ , uninteressant, daher zu eliminieren ist  $v_{1\tau}$ . Im vorliegenden Fall gilt  $v_{20} = 0$ , alle Massen sind gleich.

|                           |  |
|---------------------------|--|
| Impulserhaltung hier      | $v_{10} = v_{1\tau} + v_{2\tau}$                         |
| teilelastisch hier        | $\kappa = \frac{v_{2\tau} - v_{1\tau}}{v_{10}}$          |
| $v_{1\tau}$ uninteressant | $v_{1\tau} = v_{10} - v_{2\tau}$                         |
| einsetzen                 | $\kappa = \frac{v_{2\tau} - v_{10} + v_{2\tau}}{v_{10}}$ |
| nach $v_{2\tau}$          | $2v_{2\tau} - v_{10} = \kappa v_{10}$                    |
|                           | $v_{2\tau} = \frac{1}{2} v_{10} (1 + \kappa).$           |

Jetzt stößt Wagen (2) auf (3). Aus der alten Geschwindigkeit  $v_{2\tau}$  wird die neue  $v_{20}$ . Das vorherige Ergebnis wird angepasst

$$v_{3\tau} = \frac{1}{2} v_{20} (1 + \kappa)$$

mit  $v_{20}$       $v_{3\tau} = \frac{1}{4} v_{10} (1 + \kappa)^2$

Wagen (3) auf (4). Dabei wird aus  $v_{3\tau}$  ein neues  $v_{30}$ .

$$v_{4\tau} = \frac{1}{2} v_{30} (1 + \kappa)$$

mit  $v_{30}$       $v_{4\tau} = \frac{1}{8} v_{10} (1 + \kappa)^3$

- |   |   |
|---|---|
| a) vollkommen unelastisch, $\kappa = 0$ | $v_{4\tau} = \frac{1}{8} v_{10}$                                  |
| b) vollkommen elastisch, $\kappa = 1$   | $v_{4\tau} = \frac{1}{8} v_{10} 2^3 = v_{10}$                     |
| c) teilelastisch, $\kappa = 0,7$        | $v_{4\tau} = \frac{1}{8} v_{10} \cdot 1,7^3 = 0,614 \cdot v_{10}$ |

